***Translated by Ian Bruce* (2013).**

THE PROPAGATION OF SOUND [E305]

1. Physicists as well as Geometers have given themselves much trouble explaining how sound is transmitted through the air, but we must admit that the theory has so far been far from complete. That which the great Newton gave on this matter is ingenious enough [Section VIII, Bk. II, *Principia*], having based his arguments on purely arbitrary assumptions, and M. De La Grange, that most learned geometrician in Turin, recently has very aptly remarked in the first volume of his *Miscellanea Physico-Mathematica* published in Turin in 1759, that from some assumptions taken other than that of Newton he was able to draw the same conclusions. This might well suffice to ensure for us the accuracy of the findings, regarding the speed at which sound is transmitted through the air, but the real movement with which air particles are shaken successively remains unknown to us, and we cannot boast of understanding the propagation sound, unless we should be able to explain clearly how these motions are generated and transmitted in the air.

2. All those who have dealt with this matter after Newton either have fallen into the same trap, or wanting to delve into the true movement of the air, have rushed into intractable calculations, from which one could not draw any conclusions absolutely, and I must confess that I arrived at one or the other whenever I undertook this research. I was therefore pleasantly surprised when I saw in this excellent book that I have just mentioned, that Mr. De La Grange fortunately has overcome all these difficulties, and that by calculations which seem quite unintelligible. This is unquestionably one of the most important discoveries we have made for a long time in Mathematics, which may lead us to many others.

3. In examining these prodigious calculations, I thought at first it would not be possible to achieve the same goal by an easier route, and after some effort I got there. I have therefore the honor to explain here the method that seems the most suitable for this study, but, however simple it may appear, I must protest that it would not have come to mind for me, if I had not seen the ingenious analysis of M. De La Grange. There is a circumstance that stops us quiet short, that is, if the analysis were only applicable to continuous quantities, or the nature represented by a smooth curve or enclosed within a certain equation. This is addressed by introducing discrete amounts into the calculation that can lead us to the desired solution, and this can be done in a way similar to how I determined the movement of a string, for which we have given at the beginning some figure inexplicable by any equation.

4. Indeed, we have only to consider the propagation of sound as it actually occurs: the air is suddenly agitated somewhere, the air particles which have been placed at some distance experience no effects at first; it is only after a certain time that they are shaken up, and then they are restored to perfect equilibrium. So we can consider some one particle, removed by a distance $= x$ from the place where the impulse acts, and which after the time T receives the agitation for a moment $= \theta$. Now, if we consider the state of

that particle, and we ask its speed, it must depend on the distance *x* and on the time *t* and that, as long as *t* is less than *T*, must be $v = 0$, and because the velocity v has a finite value, the time for *t* is taken between the limits *T* and $T + \theta$, but on taking $t > T + \theta$ the velocity *v* again become zero forever. It is clear that this cannot be considered to be represented by any regular function of the time *t*.

5. It is not necessary to think that a function similar to those representing curves all contained in a certain space be suitable to express the state of air particles in the propagation of sound ; such a function of *t*, which would only have real values as long as *t* lies between the limits *t* and $T + \theta$, would not be at all suitable in our case to express the value of *v*, as it would give imaginary values for the cases where $t < T$ or where $t > T + \theta$, rather than the velocity *v* which is truly $= 0$, and not at all imaginary. One could not consider saying more than that the speed would be extremely small, yet variable, as it can be considered to be bound by the law of continuity with the finite values it receives during the interval of time, for before the disturbance occurs to the particle and afterwards, it is in a state of perfect rest as if there had never been a disturbance. This is probably one of the main reasons which have prevented the propagation of sound being submitted to calculation.

6. Mr. De La Grange has fortunately avoided this peril, having considered the air particles as isolated, without forming a continuous whole, and in this view he assigns to them a finite magnitude, so that the number of all particles dispersed in any interval should remain finite. He uses the same method by which he determines the vibrations of a string loaded with a finite number of weights in the same work, and it is by this method that he has shown by solving the equations, that the calculation can demonstrate a disturbance on a single particle of air, while all the others remain at rest. However, at the end we see that the number of particles does not enter into the calculation, and that the same circumstance must occur assuming an infinite number of air particles that fill some space. Everything comes down then to what you may know about introducing discontinuous functions into the analysis used to solve this problem, which seems a great paradox.

7. In fact, when I gave my general solution for the vibrations of strings, which also includes the case where the string would have had at the start an irregular figure inexpressible by any equation, it seemed at first very suspicious to some great geometers. And M. d' Alembert preferred to argue that in these cases it was impossible to determine the movement of a rope which admitted to my solution, although it differs in nothing from his in other cases. It was not even enough to see, as I had done, that my construction would satisfy perfectly the differential equation of the second degree, which contains the true solution without doubt, the discontinuity always seemed to him incompatible with the laws of the calculation. But now Mr. De La Grange has fully justified my solution, and that in an incontestable manner, I have no doubt that we will soon need to recognize discontinuous functions in analysis, especially when one sees that it is the only way to explain the propagation of sound.

8. The paradox seems even greater when I say that there is a very considerable part of the integral calculus, where one is forced to admit such discontinuous functions, as well as

one admits arbitrary constants in ordinary integrations. As the integral calculus is a method for finding functions of one or of several variables, when one knows some relation between their first order differentials or of one higher, the whole part concerned with functions of two or more variables is susceptible to certain functions, without excepting the discontinuities in them, and this by the same reason, that the functions of a single variable, that one has found by integration, receive an arbitrary constant, that must be determined by the essential conditions for each question.

9. To put this generally, we seek a function of *z* two variables *x* and *t*, of such a kind that there shall be

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)=a\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

where we know already that $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ indicates the fraction $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ assuming only *t* variable, and $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ the fraction $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ assuming only that x is variable. This condition is similar to that which contains the movement of vibrating strings, that is, $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=a\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, which does not differ from this except that there are here differentials of the second order, so that the same circumstances occur in one and the other. However, it is clear that one may satisfy the condition $\left(\frac{dz}{dt}\right)=a\left(\frac{dz}{dx}\right)$ on taking for *z* some function of $x+at$, without excluding discontinuous functions from that. Because, considering some curve drawn free hand not pertaining to any law, if we take the abscissa $=x+at$, the applied [line] will give the true value of *z* that satisfies the equation $\left(\frac{dz}{dt}\right)=a\left(\frac{dz}{dx}\right)$, and since one does not ask for anything else, there is nothing that compels us to believe that one regular and continuous curve must be more proper to fulfill this condition, than an irregular and discontinuous curve, and even less that these curves should be excluded.

10. Supposing that the equation is concerned with the movement of a wire, and the conditions shall be such, following after some time t, that the applied line *z* corresponds to the abscissa *x*, so that the relation shall be

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)=a\left(\frac{dz}{dx}\right);$$

and I say that taking *z* equal to any function of the quantity $x+at$, or

$$z=\Phi:(x+at)$$

we will have solved the problem generally, whatever function, whether regular or irregular, the symbol Φ has designated. But the meaning of that same symbol is always determined by the nature of the question, which shall not be known to exist unless we know the figure of the wire given at some time $t = 0$, or then, having $z = \Phi : x$, that must be precisely the equation for the initial figure of the wire, whatever it should be, whether regular or irregular. Now, knowing this figure, we determine the figure easily that the wire will after some time *t*, for to some single *x* abscissa the same applied line will correspond, which corresponds in the initial figure to the abscissa $x + at$.

11. My construction of the problem of vibrating strings is founded on similar reasoning, which is now valid from any objection. It is also on this same basis that I will establish the solution of the problem of the propagation of sound, and I will dispense with the embarrassing calculations which Mr. De La Grande has been forced to develop. So I consider this problem from the same point of view as this skilful Geometer, by considering only the particles in the air that are located on the same straight line, along which the sound propagates itself. Because, although the sound spreads equally on all sides, it seems very clear that the propagation along each straight line is not disturbed by the movements of neighboring particles around it. However it would be good to wish that we could resolve this issue in determining the agitation by the full extent of the atmosphere, but it encounters difficulties which still seem insurmountable. So I will leave it, as Mr. De La Grange does, to the movement which is made on a straight line only.

ANALYSIS FOR SOUND PROPAGATION IN A STRAIGHT LINE

12. I therefore considered only a single expanse of air along the straight line AE (Fig. 1),

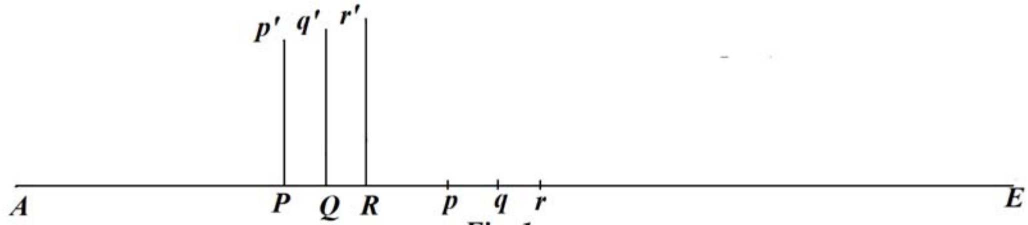

Fig. 1.

just as if the air was enclosed in an infinitely thin pipe *AE*, which I assume moreover plugged at both ends *A* and *E*, so that the circumstances that must apply to the calculation shall be determined perfectly. Let the length of the pipe be $AE = a$ and its width [meaning cross-section], which I suppose the same everywhere, and as if infinitely small $= ee$, so that the volume of air contained in the pipe is $= aee$. At first let the air be in equilibrium, or the same density throughout the length of the pipe, in order that its elasticity is the same everywhere also; in order that the height *h* is a measure of the elasticity in this equilibrium state, it is required to be extended in the same manner, so that the elasticity shall be balanced by the weight of a column of air, the height of which $= h$, or that each particle of air in the pipe is pressed on both sides by the weight of a similar mass of air, with a volume $= hee$, and the elasticity of which shall be in equilibrium with this pressure.

[The elasticity of the air was the term used originally by Robert Boyle to describe air pressure : hence Euler like his predecessors used Boyle's law in treating the variations of pressure with volume of the air in sound waves, and so considered isothermal changes only, the traditional formula for air pressure being $P = \rho gh$.]

13. Now the air in the pipe has suffered some agitation, whose state of equilibrium is disturbed, and to represent the effect, consider three points infinitely close, which in steady state were at *P, Q, R* at equal and infinitely small intervals apart, and by the disturbance to have been transported after arrival the time $= t$ to *p, q, r*, so that the particles of air between the points *P, Q, R* are now between points *p, q, r* and hence more or less condensed intervals according as *pq* and *qr* are smaller or larger than the natural intervals *PQ* and *QR*, and the elasticity will be changed in the same relation. To know this change, we put the distances for the equilibrium state :

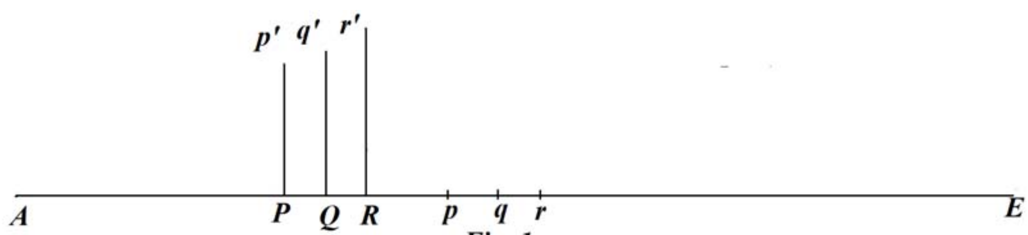

Fig. 1.

$$AP = x,\ AQ = x' = x + \omega,\ AR = x'' = x + 2\omega$$

and the disturbed state :

$$Pp = y,\ Qq = y',\ Rr = y'';$$

from that we will have the intervals

$$pq = \omega + y' - y \ \text{ and } \ qr = \omega + y'' - y'$$

and the masses of air particles contained therein shall be the same as that which the intervals *PQ* and $QR = \omega$ thus occupy in the state of equilibrium.

14. Observe here that the quantities *x* themselves refer to the equilibrium state, and they express the distances of each particle of air from the fixed point *A*, but the quantity *y* distinguishes the disturbance caused by the agitation which is appropriate to it after the time *t*. Thus the air particle, which in the steady state was removed from the fixed point *A* of the interval $= x$ finds itself after the time interval $= t$ within the interval $= x + y$ and thus the air will not be in equilibrium, provided all the *y* values may not be vanishing, if you put the applied lines *Pp', Qq', Rr'* perpendicular to the points *P, Q, R* , equal to the intervals *Pp, Qq , Rr*, the curved line that passes through the points *p', q', r'* mark the agitated state of the air in the pipe for the time $= t$; where it is evident that the first of these applied at *A* and the last at *E* must vanish. Since the pipe is closed by both ends, the air particles at *A* and *E* will be unable to move away from their places.

15. The elasticity was in the equilibrium state expressed everywhere by a height $= h$, will now be in the interval *pq* expressed by a height

$$= \frac{h \cdot PQ}{pq}$$

and in the interval *qr* by the height

$$= \frac{h \cdot PQ}{pq}$$

Hence, having put $PQ = QR = \omega$, since

$$pq = \omega + y' - y \ \text{ et } \ qr = \omega + y'' - y'$$

the height which measures the elasticity in the interval *pq* will be

$$= \frac{h\omega}{\omega + y' - y}$$

and in the interval *qr*

$$= \frac{h\omega}{\omega + y'' - y'}.$$

[*i.e.* essentially a one dimensional version of Boyle' Law.]

Now the acceleration or retardation of the movement of the particle at *q* depends on these unequal heights. For this to come into effect, having divided the entire length *AE* into infinitely small intervals equal to each other and $= \omega$, each of which contains a volume of air $= ee\omega$ in the steady state, considering these particles gathered together at the points *P, Q, R* , now to have a volume of air at *q* $= ee\omega$, which will be pushed backwards towards *A* by a force

$$= \frac{eeh\omega}{\omega + y'' - y'}$$

and forwards towards *E* by a force

$$= \frac{eeh\omega}{\omega + y' - y}.$$

16. Joining these two forces together [*i.e.* with their opposite signs], the particle of air at *q* will be pushed according to the direction *qE* by the force

$$= \frac{eeh\omega(y'' - 2y' + y)}{(\omega + y' - y)(\omega + y'' - y')};$$

of which the distance from a fixed point *A* is $Aq = x' + y'$, of which the part *x*' remains invariant with respect to the time *t*, the other part *y*' alone experiences the effect of this force, and during the element of time *dt*, we shall have this equation in accordance with the principles of Mechanics, on dividing by the mass $ee\omega$,

$$\frac{ddy'}{dt^2} = \frac{2gh(y''-2y'+y)}{(\omega+y'-y)(\omega+y''-y')},$$

where *g* indicates the height through which a heavy body falls in a second, and then the time *t* is expressed in seconds. It is thus necessary to find the value of the interval *y* for each abscissa *x* and for each time *t*.

[This equation assumes the density of air to be 1, so that the mass of air in the element is $ee\omega$; at the time there was no standard set of units, and in some situation, the force per unit mass was taken to be proportional to the acceleration, and indeed one had the mass in pounds, and the force in pounds force; thus one could write above

$$unbalanced\ \ force/unit\ mass = \frac{h(y''-2y'+y)}{(\omega+y'-y)(\omega+y''-y')} = k\times acceration;$$

the value of *k* could be found from some other well-known circumstance, such as a falling weight, in which case since the acceleration is the same for all masses, we can set $k\times acceration \equiv 1pdf\ /1pd = 1$; now the acceleration of gravity can be found from the formula $s=\frac{1}{2}at^2$, and taking $t=1$ sec and calling the distance *g*, then $a=2g$ feet/sec^2. The reader can delve into this question in the introduction to Euler's *Mechanica*, translated in this series. Thus, in this case, $k\times 2g = 1; hence\ k = \frac{1}{2g}$, and the acceleration is given as above.]

17. Now consider *x* also as a variable, and it is clear that *y* will be a function of the two variables *x* and *t*, and since in the formula $\frac{ddy}{dt^2}$ on assuming *x* constant, to avoid ambiguity we write $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$. Then the other member of our equation appears to be the only variable *x*; hence putting $\omega = dx$ we will have

$$y'-y = dx\left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ and } y''-2y'+y = dx^2\left(\frac{ddy}{dx^2}\right);$$

from which our equation takes this form

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{ddy}{dx^2}\right):\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right),$$

which would be more difficult to solve. But it is assumed further that the agitations are extremely small and that the *y* values are as if vanishing with respect to *x* : at least we can be satisfied to know the propagation of sound when the disturbances are very small, and then rejecting the term $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, we will solve this equation

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{ddy}{dx^2}\right).$$

18. Here the equation is the same as for the vibration of strings, of which one assumes the departures to be infinitely small, and in spite of that Geometers claim to have explained the movements of the strings well. So also in this case I seek only extremely small disturbing phenomena, the kind that the curve passing through the points p', q', r' makes, only departs infinitely small distances from the axis *AE*, just as we consider the figure of strings. This similarity goes even further, since this same equation that expresses the sound propagation also determines the vibrations of a chord determined by the terms *A* and *E*. Therefore we will have also the same integral equation, which in its full extent is:

$$y = \Phi:(x + t\sqrt{2gh}) + \Psi:(x - t\sqrt{2gh}).$$

This integral is even complete, since it contains two arbitrary shapes of functions, just as the double integration requires.
[Note that in this borrowed result, the term $\sqrt{2gh}$ expresses the speed of the disturbance down the pipe, or along the string.]

19. To determine the nature of these two functions, it is necessary to inquire into the conditions prescribed in the question, and in the first place it is clear that putting $t = 0$ the equation

$$y = \Phi:x + \Psi:x$$

expresses the state of the air in the pipe when it has received the first disturbance. Therefore, if we assume that the agitation by air in the pipe *AE* (Fig. 2) was reduced in the state represented by the curve *AZE*, so that each point *X* has been transported towards *E* by the interval $= XZ$, calling $AX = x$ and $XZ = z$, we will have $z = \Phi:x + \Psi:x.$ Since *z* is a given function of *x*, let it be $z = \Theta:x$, and we will have :

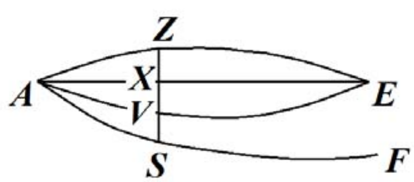

Fig.2

$$\Phi:x + \Psi:x = \Theta:x,$$

from which the nature of one of our two undetermined functions will be determined. Now it must be noted especially that the curve *AZE* must be almost infinitely close to the axis *AE* in its extent, but it must meet with the axis at both ends *A* and *E*, so that *z* is very small, and completely $= 0$ for the cases $x = 0$ and $x = a$.

20. The other determination must be drawn from the motion which all the air particles have had from the first moment of the disturbance. Thus consider another curve given *AVE*, whose applied lines express the speeds that have been impressed on the particles of air in the direction *X*E, of such a kind that *v* must also be given as function of *x*. Because, whatever shall be the agitation, its first effect will always be determined by these two curves *AZE* and *AVE*, of which the first shows the distance by which each particle has been moved, and the other shows the speed which has been impressed upon it by this movement. If one wishes that the particles of air, having been driven by these noted intervals, should be stopped there suddenly and then released, the curve *AVE* should meet with the axis AE, on account of all $v=0$. But it should be noted in any case that the velocities at *A* and *E* be $=0$.

21. To take advantage of this condition, seeking the speed at some point in general, which is $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, it is necessary to differentiate our functions and using for this purpose the following symbols :

$$d.\Phi:u=du\ \Phi':u \quad \text{and} \quad d.\Psi:u=du\ \Psi':u\,,$$

the formula

$$y=\Phi:(x+t\sqrt{2gh})+\Psi:(x-t\sqrt{2gh})\,,$$

in taking *t* only as the variable, will give

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)=\sqrt{2gh}\Phi':(x+t\sqrt{2gh})-\Psi':(x-t\sqrt{2gh})\,,$$

and therefore in the beginning, when $t=0$ and the velocity is *v*, we will have

$$\frac{v}{\sqrt{2gh}}=\Phi':x-\Psi':x$$

Multiplying by *dx* and integrating to obtain :

$$\frac{\int vdx}{\sqrt{2gh}}=\Phi:x-\Psi:x\,,$$

where $\int vdx$ or the area *AXV*, being also a given function of *x*, shall be $\int vdx=\Sigma:x$
And we have this equation:

$$\Phi : x - \Psi : x = \frac{\Sigma : x}{\sqrt{2gh}}.$$

22. This equation together with that found above,

$$\Phi : x + \Psi : x = \Theta : x$$

determine the nature of both the general functions Φ and Ψ by the two given functions Θ and Σ, where we obtain

$$\Phi : x = \tfrac{1}{2}\Theta : x + \frac{\tfrac{1}{2}\Sigma : x}{\sqrt{2gh}} \quad \text{and} \quad \Psi : x = \tfrac{1}{2}\Theta : x - \frac{\tfrac{1}{2}\Sigma : x}{\sqrt{2gh}}$$

So our general equation, which indicates any displacement of the *X* particle after a time t, will be

$$y = \frac{\Theta(x+t\sqrt{2gh}) + \Theta(x-t\sqrt{2gh})}{2} + \frac{\Sigma(x+t\sqrt{2gh}) + \Sigma(x-t\sqrt{2gh})}{2\sqrt{2gh}}$$

and the speed of the same particle towards *E* will be

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{\Theta'(x+t\sqrt{2gh}) - \Theta'(x-t\sqrt{2gh})}{2}\sqrt{2gh} + \frac{\Sigma'(x+t\sqrt{2gh}) + \Sigma'(x-t\sqrt{2gh})}{2},$$

where it should be noted that $\Sigma' : x = v$, since $\Sigma : x = \int vdx.$

23. Now the complete solution may be determined, if the two ends *A* and *E* were removed to infinity. For, describing yet another curve *ASF* of which the applied lines *XS* express the area *AXV*, of such a kind that $XS = \Sigma : x$, one can take in the two curves *ASF* and *AZE*, where $XZ = \Theta : x$, the applied lines which correspond to all the abscissas $x + t\sqrt{2gh}$ and $x - t\sqrt{2gh}$, and from that one will have for all the instants of time, the quantities *y* which come together for each particle of air *x*. But as soon as the column of air *AE* is terminated by the points *A* and *E*, beyond which the disturbance cannot be communicated, these curves formed from the first state of the air no longer provide the applied lines which correspond to the abscissas $x + t\sqrt{2gh}$, when they are larger than $AE = a$, nor the abscissa $x - t\sqrt{2gh}$, when they are negative. It is not necessary to continue the nature of these curves, which do not enter into any consideration, since the given curves *AZE* and *ASF* likewise shall be able to be discontinuous.

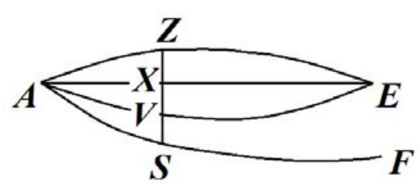

Fig.2

24. Now hence we have a need of some additional determinations that let us discover our true applied lines for the two given curves, when one takes the abscissa greater than $AE = a$, or negative. For this purpose we have only to look at the conditions mentioned above, which take either $x = 0$ or $x = a$, and the applied line *y* must remain $= 0$ always, from which we derive

$$\Theta : t\sqrt{2gh} + \Theta : -t\sqrt{2gh} + \frac{\Sigma : t\sqrt{2gh} - \Sigma : -t\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gh}} = 0$$

and

$$\Theta : \left(a + t\sqrt{2gh}\right) + \Theta : \left(a - t\sqrt{2gh}\right) + \frac{\Sigma : \left(a + t\sqrt{2gh}\right) - \Sigma : \left(a - t\sqrt{2gh}\right)}{\sqrt{2gh}} = 0.$$

Thus having an abscissa, either greater than *a*, such as $a + u$, or negative such as $-u$, we will have

$$\Theta : (a+u) + \frac{\Sigma : (a+u)}{\sqrt{2gh}} = -\Theta : (a-u) + \frac{\Sigma : (a-u)}{\sqrt{2gh}}$$

and

$$\Theta : (-u) + \frac{\Sigma : (-u)}{\sqrt{2gh}} = -\Theta : u - \frac{\Sigma : u}{\sqrt{2gh}},$$

from which it will be possible always to designate those applied lines in terms of those which are found actually between *A* and *E*.

THE PROPAGATION OF SOUND

25. Now, to explain the propagation of sound by the line *AE* (Fig. 3), suppose that by some force a small portion of air *mn* has been disturbed and put into the state represented by the small curve *mon*, where the air having been at rest shall be released suddenly, while the rest as in *Am* and *nE* shall still be in equilibrium,

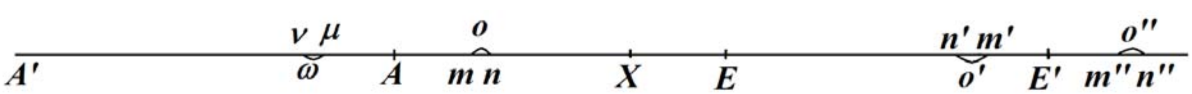

Fig. 3

and consider how this disturbance is communicated successively with the other particles of air. In this hypothesis the function Σ vanishes and there remains only the function Θ, which expresses the applied lines of the curve *mon*, as long as the abscissas fall within the interval *mn*. However, since at the beginning when $t = 0$, the air particles except in the space *mn* are in equilibrium, the whole line that represents the initial state is composed of the right line *Am*, the curve *mon* and the right line *nE*, thus forming a compound line *AmonE*, wherein, taking an abscissa $=u$, the applied line will give the value $\Theta:u$. Then, since $\Theta:(-u)=\Theta:u$, it is necessary in the preceding continuation $AA'=a$ to consider the same line $A\mu\omega\nu A$ in an inverted situation. Further, since

$$\Theta:(a+u)=-\Theta:(a-u)$$

it is necessary in the continuation *EE'* to establish the same line also inverted and so on for the other intervals $=a$ taken on this line from one side and the other.

26. From here we see that the applied line $\Theta:u$ shall be always $=0$, unless the abscissa *u*, reckoned from point *A* to the right, falls either between the limits

$$\begin{cases} Am \\ An \end{cases}, \text{ or between } \begin{cases} An' \\ Am' \end{cases}, \text{ or } \begin{cases} Am'' \\ An'' \end{cases} \text{ etc.}$$

$$\text{or between } \begin{cases} -A\mu \\ -A\nu \end{cases}, \text{ or } \begin{cases} -A\nu' \\ -A\mu \end{cases} \text{ etc.}$$

So if we set $Am=m$ and $An=n$, these limits beyond which the applied line $\Theta:u$ will $=0$ everywhere, there will be

$$\text{either } \begin{cases} m \\ n \end{cases}, \text{ or } \begin{cases} 2a-n \\ 2a-m \end{cases}, \text{ or } \begin{cases} 2a+m \\ 2a+n \end{cases}, \text{ or } \begin{cases} 4a-n \\ 4a-m \end{cases}, \text{ or } \begin{cases} 4a+m \\ 4a+n \end{cases} \text{ etc.}$$

$$\text{or } \begin{cases} -m \\ -n \end{cases}, \text{ or } \begin{cases} -2a+n \\ -2a+m \end{cases}, \text{ or } \begin{cases} -2a-m \\ -2a-n \end{cases}, \text{ or } \begin{cases} -4a+n \\ -4a+m \end{cases}, \text{ or } \begin{cases} -4a-m \\ -4a-n \end{cases} \text{ etc.}$$

In general, then any two limits will be

$$\begin{cases} \pm 2ia \pm m \\ \pm 2ia \pm n \end{cases}$$

and unless the abscissa *u* falls between two such limits, the applied line $\Theta:u$ will always be $=0$.

27. Taking for the present some arbitrary point X on the right line AE, putting $AX = x$, and looking for the disturbances which it shall undergo, which we know from the quantity y, whose value after the time t is

$$y = \frac{1}{2}\Theta : (x + t\sqrt{2gh}) + \frac{1}{2}\Theta : (x - t\sqrt{2gh}),$$

and at first we see that the first term is $= 0$, unless $x + t\sqrt{2gh}$ falls between the limits

$$\begin{cases} m \\ n \end{cases}, \text{ or } \begin{cases} 2a - n \\ 2a - m \end{cases}, \text{ or } \begin{cases} 2a + m \\ 2a + n \end{cases} \text{ etc.}$$

However, the other term vanishes always, unless the quantity $x - t\sqrt{2gh}$ falls between the limits $\begin{cases} m \\ n \end{cases}$, or its negative $t\sqrt{2gh} - x$ between the limits

$$\begin{cases} m \\ n \end{cases}, \begin{cases} 2a - n \\ 2a - m \end{cases}, \text{ or } \begin{cases} 2a + m \\ 2a + n \end{cases} \text{ etc.}$$

So if we assume $AX = x > n$, that particle will remain at rest until it becomes

$$x - t\sqrt{2gh} = n \text{ or } t = \frac{x - n}{\sqrt{2gh}}.$$

It is therefore after this time, that the particle at X begins to shake, and then it will be restored to rest after the time $\frac{x - m}{\sqrt{2gh}}$, so that the disturbance will last for a time $\frac{n - m}{\sqrt{2gh}}$. From which we see that every particle of air is shaken for a very small time, depending on the extent of the initial agitation *mn*, and it is then that the sound is experienced there.

28. Hence it requires a time $t = \frac{x - n}{\sqrt{2gh}}$, before the sound comes from n to X, or is transmitted through the distance $nX = x - n$. Hence we consider that time to be proportional to the distance, as we know by experience. I have noted already that the time t is expressed in seconds, if we take for g the height through which a heavy body falls in a second, therefore, during one second and putting $t = 1$, the sound will be transmitted through a distance $= \sqrt{2gh}$. Now one knows that $g = 15\tfrac{5}{8}$ Rhenish feet, and if the spring of the air is counterbalanced by a column of water 32 feet, assuming water 800 times heavier than air, the height h will be $= 32 \cdot 800$ feet, from which one finds

$$\sqrt{2gh} = \sqrt{31\tfrac{1}{4}\cdot 32\cdot 800} = 400\sqrt{5} = 894 \text{ feet.}$$

We know that sound is transmitted in one second through a distance of almost 1100 feet and no one has discovered yet the cause of this acceleration on the theory.

[Laplace later was to consider the adiabatic nature of sound transmission and to provide the correct answer : in other words the air had more 'spring' in it than Boyle's Law predicted; essentially, at this time, the basic physics was understood imperfectly; what Euler was able to do however, was to put in place some of the mathematical machinery needed to study the transmission of pulses.]

29. But after the particle of air at X was disturbed the first time, it will then be put into agitation several more times, and even an infinite number of times, because it finds itself disturbed whenever the time t elapsed will be contained following limits:

$$t\sqrt{2gh} = \begin{cases} x+m,\ 2a-n-x,\ 2a-n+x,\ 2a+m-x,\ 2a+m+x \ \text{ etc.} \\ x+n,\ 2a-m-x,\ 2a-m+x,\ 2a+n-x,\ 2a+n+x \ \text{ etc.} \end{cases}$$

If the line AE had no end point, the particle X would be shaken only once ; if it had only the one extremity A, the distance being infinite, it would receive a disturbance again after the time $= \dfrac{x+m}{\sqrt{2gh}}$, which is the explanation of a simple echo. But if the line AE is terminated at both the ends A and E, the disturbance happens several times in succession, which serves to explain repeated echoes. For this to happen, it is necessary that the last air particles at A and E are not susceptible to any motion, which is a necessary condition for the production of echoes.

[At this point, the idea of standing waves in pipes was emerging.]

30. Since we have found

$$y = \frac{1}{2}\Theta:(x+t\sqrt{2gh}) + \frac{1}{2}\Theta:(x-t\sqrt{2gh}),$$

it is still necessary to note that the disturbance of the particle X is only half that which the particle mn had on being disturbed originally. For the quantity y receives only the magnitude when one or the other term falls into the interval mn, and since both cannot be considered to fall into the interval at the same time, there will only be the amount equal to half applied in the interval mn, from which it follows that the agitations of the particle X is twice as weak as the agitation on the original particle mn. This is also a necessary consequence of the principle that the effect cannot be considered to be greater than the cause, for, since the initial disturbance at mn communicates equally towards A and E, at each moment there will be had two particles equally distant from one side to the other of mn, which will be disturbed, whose motions taken together must become equal to the original motion at *mn*, on account of which each cannot be more than half. But this decrease is much greater when the agitation at *mn* will be spread in all directions, from which is seen that the sounds transmitted through a pipe must be stronger.

EXPLANATION OF A PARADOX

31. A doubt is raised here, that is not so easy to dispel, it appears that the disturbance which presently finds itself at *X*, might be regarded as the original disturbance at *mn*, and the disturbance ought to be transmitted backwards as well as forward, however this does not happen, as we have seen that the disturbance present in *X*, is transmitted successively forwards to *E* and not at all backwards to *A*; it is the same for disturbances that spread out from *mn* in the opposite direction towards *A*, which are transmitted in the same direction. Similarly, they generate no new disturbances in the opposite direction. Here I make an abstraction about the limits *A* and *E*, and I consider them as extended to infinity, and as I introduced them into the calculation only to explain echoes. We therefore ask with reason, what is the difference between the original disturbance at *mn* and that which is generated since at *X*, for if all is at rest except for the particles near *X*, which are displaced from their natural state, it seems that this should be considered like the original sound and it ought to communicate just as well to *A* as to *E*. However it would be quite contrary to experience and we know there is a big difference between where the sound is generated and where it is perceived.

32. Therefore it is necessary that there is an essential difference between the disturbance communicated to the air particles at *X* and the original disturbance *mn*, and everything returns to discover this difference. Now, having introduced the disturbance at *mn* into the original calculation , I have assumed a restriction, by neglecting the functions indicated by the sign Σ, which contains that condition that the particles in space *mn*, having been displaced from their natural situation, have found themselves without any movement and have been released suddenly. Hence we must conclude that if the particles of *X* after having been displaced, were at once at rest, it ought to result in the same effect as the original disturbance in *mn*. But though each particle *X*, having reached its greatest digression, is reduced to rest there, it does not happen for all the particles that are around *X* at the same time and therefore it is here, no doubt, that one must seek the explanation of our difficulty.

33. From that it is clear that the propagation depends not only on the displacement of the particle motion at *mn*, but also on the motion imprinted on them during the original disturbance, which has so much influence on the propagation, which in a certain case it is done only in one direction . It is therefore very important to address this issue in its entirety, without neglecting the functions signified by Σ. For this purpose I do not limit myself to a line or a finite pipe and I assume it to be infinite, since it is no longer concerned with echoes. At the beginning thus the particles of air contained in the space *mn* (Fig. 4) having been disturbed,

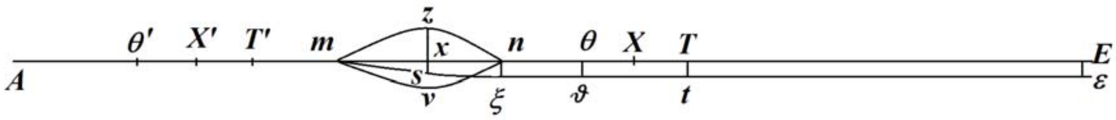

Fig. 4.

so that the point *x* has been transported towards *E* by a distance $= xz$, the applied line of the given curve *mzn*, and at that same point was impressed with the speed $= xv$ also in the same direction towards *E*, where *xv*, the applied line of the given curve *mvn*, expresses the distances traversed by this speed in a second. From which one can form by quadrature of this curve *mvn* a new curve $ms\zeta$, of such a kind that its applied line is

$xs = \dfrac{mxv}{\sqrt{2gh}}$, and since the curved line of the speed from one side or another of the

distance *mn* merges with the same axis *mA* and *nE*, the continuation of the curve $ms\zeta$ will be towards *A* on the same axis *mA*, and towards *E* along the right line ζs parallel to the axis *nE*.

34. With that in place, taking some arbitrary point *X* and putting $AX = x$, after the time $= t$ it will be pushed towards *E* by a distance *y*, so that

$$y = \frac{1}{2}\Theta:(x+t\sqrt{2gh}) + \frac{1}{2}\Theta:(x-t\sqrt{2gh}) + \frac{1}{2}\Sigma:(x+t\sqrt{2gh}) - \frac{1}{2}\Sigma:(x-t\sqrt{2gh}),$$

since here the denominator $\sqrt{2gh}$ which is found in § 22, is already present in the function. But here Θ indicates the applied lines of the curve *mzn*, which merges with the axis *mn* on both sides of the region, so that $\Theta:u$ is always zero unless *u* is between the limits *Am* and *An*, where *A* is a fixed point taken at will, from where I measure the abscissas, without the pipe ending or being closed there. In the same way, the character Σ indicates the applied lines of the curve $Ams\xi\varepsilon$, so that the value of $\Sigma:u$ is zero, when $u < Am$, and equal to $n\zeta = Ee$ when $u > An$. But if *u* lies between these two limits, as if $u = Ax$, then we will have $\Sigma:u = xs$. There is no need to advise that, if some applied line lies in the opposite direction from that shown in the figure, it is necessary to be considered as negative.

35. Initially consider a point *X* more distant from the fixed point *A* than the interval *mn*, and since $AX = x$, taking the intervals from one side or the other to be $XT = X\Theta = t\sqrt{2gh}$, in order to have $AT = x + t\sqrt{2gh}$ and $A\Theta = x - t\sqrt{2gh}$, and it is clear that , while $X\Theta < Xn$, there will be

$$y = \tfrac{1}{2}Tt - \tfrac{1}{2}\Theta\vartheta = 0,$$

since

$$\Theta:AT = 0,\ \Theta:A\Theta = 0 \ \text{ and } \ \Sigma:AT = Tt,\ \Sigma:A\Theta = \Theta\vartheta.$$

However, when the point Θ falls within the interval *mn*, or $X\Theta = t\sqrt{2gh} = Xx$, we will have

$$\Theta : AT = 0,\ \Theta : Ax = xz,\ \ \Sigma : AT = Tt = n\zeta \text{ and } \Sigma : Ax = xs$$

and thus,

$$y = \tfrac{1}{2}(xz + n\zeta - xs)$$

which is the distance by which the point *X* will be moved from its natural location towards *E* after the time $t = \frac{Xx}{\sqrt{2gh}}$. But after the time $t = \frac{Xm}{\sqrt{2gh}}$ we will have $y = \tfrac{1}{2}n\zeta$,

which also will remain as the value of *y* when $t > \frac{Xm}{\sqrt{2gh}}$, on which account since at that time it will be at rest, although moved from its natural place by the distance $\tfrac{1}{2}n\zeta$, its disturbance only lasting from the time $t = \frac{Xn}{\sqrt{2gh}}$ until the time $t = \frac{Xm}{\sqrt{2gh}}$.

36. Now consider any point X' on the other side of the disturbed distance *mn*, such that $AX' = x$, and taking equal intervals from side to side $X'T' = X'\Theta' = t\sqrt{2gh}$, we see that as long as $X'T' < X'm$, or $t = \frac{X'm}{\sqrt{2gh}}$, the point X' will at rest, but if *T′* is in advance of *x*, so that $t = \frac{X'x}{\sqrt{2gh}}$, because

$$\Theta : Ax = xz,\ \Theta : A\Theta' = 0,\ \Sigma : Ax = xs \text{ and } \Sigma : A\Theta' = 0,$$

we will have

$$y = \tfrac{1}{2}xz + \tfrac{1}{2}xs = \tfrac{1}{2}(xz + xs),$$

and after the time

$$t = \frac{X'n}{\sqrt{2gh}},$$

we will have

$$y = \tfrac{1}{2}n\zeta$$

which since the value of *y* remains constant, so that this particle *X ′* also, after having been disturbed, will find itself moved away from its natural place towards *E* by the interval $= \tfrac{1}{2}n\zeta$. So after all disturbances are over, the whole line of air *AE* will be advanced in the direction *AE* by the interval $\tfrac{1}{2}n\zeta$.

37. From that we see that the disturbances of the particles *X* and *X '*, one of which is on this side and the other beyond the original disturbance *mn*, are quite different, seeing that at *X* the largest displacement is $=\frac{1}{2}(xz-xs+n\zeta)$ and at $X'=\frac{1}{2}(xz+xs)$, and thus in this case the sound otherwise is all transmitted before the end of the other, whereas, in the previous case, where the original velocities *xv* were vanishing, the propagation was the same on both sides. But one can see in addition, it might be possible that the propagation may be made in one direction only, which would happen if in some space *mn* there was $xz-xs+n\zeta=0$. For this purpose, since *xz* and *xs* vanish in *m*, it would be necessary that there should be $n\zeta=0$ and $xs=xz$. Thus putting

$$xz=z,\ xv=\ v \text{ and } xs=\frac{\int vdx}{\sqrt{2gh}},$$

this condition requires that there must be

$$z\sqrt{2gh}=\int vdx \text{ and } v=\frac{dz\sqrt{2gh}}{dx}.$$

In this case the curve $ms\zeta$ will be equal and similar to the other *mzn* and rejoins the axis at *n*, so that $n\zeta=0$. Then the particles *X* located in one part of the disturbed region *mn* towards *E*, will not be disturbed at any point and the propagation will be towards the other side of *m* only, towards *A*.

[The initial pulse is asymmetric about the origin *A*.]

38. However, this is precisely the case of the disturbances that are produced by some initial disturbance, which are always such that, even if they shall be the original, they may be sent only in one direction. In order to be assured one only has to give the value to *z* found from the value of *y* above and to *v* the value of $\left(\frac{dy}{dt}\right)$; then one will have

$$z=\frac{1}{2}\Theta:(x+t\sqrt{2gh})+\frac{1}{2}\Theta:(x-t\sqrt{2gh})+\frac{1}{2}\Sigma:(x+t\sqrt{2gh})-\frac{1}{2}\Sigma:(x-t\sqrt{2gh}),$$

$$\frac{v}{\sqrt{2gh}}=\frac{1}{2}\Theta':(x+t\sqrt{2gh})-\frac{1}{2}\Theta':(x-t\sqrt{2gh})+\frac{1}{2}\Sigma':(x+t\sqrt{2gh})+\frac{1}{2}\Sigma':(x-t\sqrt{2gh}),$$

and taking the differential of *z*, assuming *x* is variable only,

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{1}{2}\Theta':(x+t\sqrt{2gh})+\frac{1}{2}\Theta':(x-t\sqrt{2gh})+\frac{1}{2}\Sigma':(x+t\sqrt{2gh})-\frac{1}{2}\Sigma':(x-t\sqrt{2gh})$$

Now, there is always only one of the two abscissas $x+t\sqrt{2gh}$ or $x-t\sqrt{2gh}$, as we have seen above, to which there corresponds a finite applied line. Thus, if it is the first, clearly there will be had

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{v}{\sqrt{2gh}};$$

and hence such a disturbance will be considered to communicate in one direction only. There is then the true explanation of the paradox proposed.

WHY MANY SOUNDS ARE NOT CONFUSED

39. From that one understands clearly the reason why many sounds are not confused, a question that always has troubled physicists. The theory of the great Newton, though justly profound, does not appear sufficient to explain this phenomenon, since it does not determine the true nature of the disturbances to which all particles in the air are subject M. De Mairan imagined that each sound, whether it be low or high, is transmitted according to certain air particles, for which the spring is suitable. But, besides that state of equilibrium requires that all air particles are endowed absolutely with the same degree of spring, this explanation is upset by the first principles upon which our theory is based and whose certainty could not be considered to be in doubt. Indeed, the propagation does not agree that only a single disturbance be excited in the air and it is of no consequence if the above is followed by others or not, and even less does it depend on the arrangement of their succession , from which we judge the bass and treble sounds.

40. To fully clarify this above we have only to assume that several disturbances originate on the straight line *AE* (Fig. 5) and

Fig. 5

considering some particle of air at *P*, we see by what I have just explained that the disturbance α will be communicated to it after the time $\frac{P\alpha}{\sqrt{2gh}}$; then it will receive the disturbance *a* after the time $\frac{Pa}{\sqrt{2gh}}$, and therefore of the others, so that each disturbance is transmitted by the same particle *P* at a determined time and an ear placed at *P* will perceive all these disturbances without one being disturbed by the others. It may also happen that two disturbances arrive at the same time at the same particle, such as *O*, the distances aO and αO being equal; but then the particle will be shaken more, than if it received a simple disturbance, and then communicate its shock forwards as well as backwards. However, this is precisely the case where we ought to think that the disturbances must confuse each other, which however does not occur, just as little at O than at any other point P. [*i.e.* another hint of the Superposition Principle.]

REFLECTIONS ON THE PREVIOUS THEORY

41. First it should be noted that I have considered here only that propagation on a straight line, or as if the air were contained in a very narrow cylindrical pipe, from which one might be able to consider that in open air it might follow quite different laws. At least it is evident that the disturbances, having expanded out in all directions, must diminish much more considerably than in the case of a pipe ; but regarding the nature of the disturbances and speed with which they are transmitted to some distances, it seems certain that it will be the same in open air as in the air enclosed in a tube, for, since sound as well as light is communicated by straight lines, which one may call sound rays, the transmission along each of these straight lines must follow the same rules that I have just discovered, with the only difference that the disturbances will become so much weaker, the greater the distance will be. However it would be hard to wish that one could be able to solve the same problem in the case of free air.

42. In the second place, it is always a great difficulty, that the sound actually traverses a much greater distance than the theory indicates ; I recognize now that the disturbances following cannot be considered the cause of that, as I had imagined formerly. But it is essential to compare the case of experience with that for which the theory is in dispute. Without claiming that the air can cause this difference, we must remember that our calculation assumes an almost infinitely small disturbance, which would produce too weak sounds for one to be able to observe their propagation distance for a second. So, since the sounds that are used in the experiments are generated by strong disturbances, it is very likely that in the main equation in § 17, which is

$$\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=2\mathrm{g}h\left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

it is no longer possible to neglect the term, as I did in the previous calculation. Perhaps it is here that one must seek the development of this difficulty.

43. Finally, whatever this may be, we are indebted to Mr. De La Grange for this important discovery, I flatter myself that this memoir does not lack in very interesting research. In addition my analysis is very simple, and I have put the use of discontinuous functions in its place, challenged by some great geometers, but it is absolutely necessary whenever it is found by integrating functions of two or more variables, and a general solution is to be found. Next, although the resolution is similar to that of vibrating strings, which I have given before, I here determined the arbitrary functions more accurately by the conditions of the nature of the question. But this solution applied to strings is more general, since the initial state can not only give any figure to the rope, but any motion to all its elements, that I had not noted in my memoir above on that, nor even by those who

have dealt with the same matter. Finally, I believe that the explanation of the paradox that the disturbances caused by the propagation of sound are of a quite different nature from the original ones, has furnished us with considerable enlightenment in this difficult matter.

DE LA PROPAGATION DU SON

Memoires de l'academie des sciences de Berlin [15] (1759), 1766, p. 185-209.

1. Les Physiciens aussi bien que les Geometres se sont donnes bien de la peine pour expliquer comment le son est transmis par l'air, mais il faut avouer que la théorie en a été jusqu'ici fort incomplette. Ce que le grand Newton a donné sur cette matiere est plus ingénieux que suffisant, ayant fondé ses raisonnemens sur des hypotheses purement arbitraires; et M. De La Grange, très savant Géometre a Turin, vient de remarquer très judicieusement dans le premier volume des Miscellanea Physico-Mathematica publiés a Turin à 1759, que, quelques autres hypotheses qu'eût prises Newton, il en auroit tiré les memes conclusions. Cela pourroit bien suffire pour nous assurer de la justesse des conclusions, qui regardent la vitesse dont le son est transmis par l'air; mais le vrai mouvement dont les particules de l'air sont ébranlées successivement nous demeure également inconnu; et nous ne saurions nous vanter de comprendre la propagation du son, à moins que nous ne fussions en état d'expliquer clairement, comment ces ébranlemens sont engendrés et transmis dans l'air.

2. Tous ceux qui ont traité cette matiere après Newton ou sont tombés clans le même défaut ou, voulant approfondir le vrai mouvement de l'air, se sont précipités dans des calculs intraitables, d'où l'on ne sauroit absolument tirer aucune conclusion; et je dois avouer qu'il m'est arrivé l'un ou l'autre, toutes les fois que j'ai entrepris cette recherche. Je fus donc bien agréablement surpris, lorsque je vis, dans cet excellent livre que je viens d'alléguer, que M. De La Grange a surmonté heureusement toutes ces difficultés, et cela par des calculs qui paroissent tout a fait indéchiffrables. C'est sans contredit une des plus importantes découvertes qu'on ait faites depuis longtems dans les Mathématiques, et qui nous pourra conduire à bien d'autres.

3. En examinant ces calculs prodigieux, j'ai pensé d'abord s'il ne seroit pas possible de parvenir au même but par une route plus facile, et après quelques efforts j'y suis arrivé. J'aurai done l'honneur d' expliquer ici la méthode qui me semble la plus propre pour cette recherche; mais, quelque simple qu'elle puisse paroitre, je dois protester qu'elle ne me seroit pas venue dans l'esprit, si je n'avois pas vu l'ingenieuse analyse de M. De La Grange. Il y a une circonstance qui nous arrêteroit tout court, si l'Analyse n'étoit applicable qu'a des quantités continues, ou dont la nature puisse être représentée par une courbe réguliere, ou renfermée dans une certaine équation. Ce n'est donc que l'adresse d'introduire des quantités discontinues dans le calcul qui nous peut conduire a la solution cherchée; et cela se peut faire d'une maniere semblable à celle dont j'ai déterminé le mouvement d'une corde à laquelle on aura donné au commencement une figure quelconque inexplicable par aucune équation.

4. En effet, on n'a qu' à envisager la propagation du son comme elle se fait actuellement: l'air étant brusquement agité en quelque endroit, les particules d'air qui en sont assés éloignées n'en ressentent d'abord rien; ce n'est qu'après un certain tems qu'elles sont ébranlées, et depuis elles sont rétablies dans un parfait équilibre. Concevons donc une particule quelconque, éloignée du lieu ou se fait l'impulsion de la distance $=x$, et qu'après le tems T elle reçoive l'agitation pendant un moment $=\theta$. Maintenant, si nous considérons l'état de cette particule et que nous posions sa vitesse $=v$, elle doit dépendre en sorte de la distance x et du tems t, que, tant que t est moindre que T, il soit $v=0$, et que la vitesse v ait une valeur finie, pendant que le tems t est pris entre les limites T et $T+\theta$, mais, qu'en prenant $t>T+\theta$, la vitesse v redevienne pour toujours égale à zéro. On voit bien que cela ne sauroit être répresenté par aucune fonction réguliere du tems t.

5. Il ne faut pas penser qu'une fonction semblable à celles qui representant les courbes toutes renfermées dans un certain espace soit propre à exprimer l'état des particules de l'air dans la propagation du son; une telle fonction de t, qui n'auroit des valeurs réelles que tant que t se trouve entre les limites t et $T+\theta$, ne convient nullement à notre cas pour exprimer la valeur de v, puisqu'elle donneroit pour les cas ou $t<T$ ou $t>T+\theta$ des valeurs imaginaires, au lieu que la vitesse v est alors véritablement $=0$ et point du tout imaginaire. On ne sauroit dire non plus que la vitesse seroit alors extremêment petite, mais pourtant variable, afin qu'elle puisse être considérée comme liée par la loi de continuité avec les valeurs finies qu'elle reçoit pendant l'intervalle de tems θ; car, avant l'agitation qui arrive a cette particule, et apres, elle se trouve dans un aussi parfait repos que s'il n'y avoit eu jamais d'agitation. C'est sans doute une des principales raisons qui ont empêché de soumettre au calcul la propagation du son.

6. Mr. De La Grange a heureusement évité cet écueil, ayant considéré les particules de l'air comme isolées, sans former un tout continu; et dans cette vue il leur a assigne une grandeur finie, de sorte que le nombre de toutes les particules dispersées par un intervalle quelconque demeurât fini. Il s'est servi de la même methode dont il à déterminé dans le même ouvrage les vibrations d'une corde chargée d'un nombre fini de poids; et c'est par cette méthode qu'il a fait voir, par la résolution des équations, que le calcul peut montrer un ébranlement dans une seule particule de l'air, pendant que toutes les autres demeurent en repos. Or, à la fin on voit que le nombre des particules n 'entre plus en considération, et que la même circonstance doit avoir lieu en supposant infini le nombre des particules d'air qui remplissent un certain espace. Tout revient donc à ce qu'on sache introduire des fonctions discontinues dans l'Analyse qui sert à résoudre ce probleme; ce qui paroit un grand paradoxe.

7. En effet, lorsque je donnai ma solution générale pour les vibrations des cordes, qui comprend aussi les cas où la corde auroit eu au commencement une figure irrégulière et inexprimable par aucune équation, elle parut d'abord fort suspecte à quelques grands Géometres. Et M. D'Alembert aima mieux soutenir que dans ces cas il étoit absolument impossible de determiner le mouvement d'une corde, que d'admettre ma solution, quoiqu'elle ne differe en rien de la sienne dans les autres cas. Il n'étoit pas même suffisant

de faire voir, comme j'ai fait, que ma construction satisfaisoit parfaitement à l'équation différentielle du second degré, qui renferme sans contredit la veritable solution; la discontinuite lui parut toujours incompatible avec les lois du calcul. Mais à présent M. De La Grange ayant justifié pleinement ma solution, et cela d'une maniere incontèstable, je ne doute pas qu'on ne reconnoisse bientôt la nécessité des fonctions discontinues dans l'Analyse, surtout quand on verra que c'est l'unique moyen d'expliquer la propagation du son.

8. Le paradoxe paroitra encore plus grand, quand je dis qu'il y a une partie trés considèrable du calcul intégral, où l'on est obligé d'admettre de telles fonctions discontinues, aussi bien qu'on admet des constantes arbitraires dans les intégrations ordinaires. Comme le calcul intégral est une méthode de trouver des fonctions d'une ou de plusieurs variables, lorsqu'on connoit quelque rapport entre leurs différentiels du premier ordre ou d'un plus haut, toute la partie où il s 'agit des fonctions de deux ou plusieurs variables est susceptible de fonctions quelconques, sans en excepter les discontinues; et cela par la même raison, que les fonctions d'une seule variable, qu'on trouve par l'integration, reçoivent une constante arbitraire, qu'il faut déterminer ensuite par les conditions essentielles à chaque question.

9. Pour mettre cela dans tout son jour, cherchons une fonction z de deux variables x et t, de sorte qu'il soit

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = a\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

où l'on sait deja que $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ marque la fraction $\frac{dz}{dt}$ en ne supposant que t variable, et $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ la fraction $\frac{dz}{dx}$, en ne supposant que x variable. Cette condition est semblable à celle qui renferme le mouvement des cordes vibrantes, qui est $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = a\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, qui ne differe de celle-là que puisqu'il y a ici des differentiels du second degre, de sorte que les mêmes circonstances ont lieu dans l'une et dans l'autre. Or, il est èvident qu'on satisfait à la condition $\left(\frac{dz}{dt}\right) = a\left(\frac{dz}{dx}\right)$ en prenant pour z une fonction quelconque de $x + at$, sans en exclure les fonctions discontinues. Car, concevant une courbe quelconque tracée de main libre sans aucune loi, si l'on prend l'abscisse = $x + at$, l'appliquée donnera une juste valeur de z, qui satisfait à l'équation $\left(\frac{dz}{dt}\right) = a\left(\frac{dz}{dx}\right)$; et puisqu'on ne demande pas autre chose, il n'y à rien qui nous oblige à croire qu'une courbe reguliere et continue soit plus propre a remplir cette condition, qu'une courbe irréguliere et discontinue, et encore moins que celles-ci doivent être exclues.

10. Supposons qu'il s'agisse du mouvement d'un fil, et que les conditions soient telles, qu'il s'ensuive qu'après un tems quelconque t il réponde a l'abscisse x une appliquée z en sorte qu'il soit

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = a\left(\frac{dz}{dx}\right) ;$$

et je dis que prenant z égale a une fonction quelconque de la quantite $x+at$, ou

$$z = \Phi:(x+at),$$

on aura résolu généralement le probleme, quelque fonction, soit réguliere, soit irréguliere, que marqua le signe Φ . Mais la signification de ce même signe est toujours déterminée par la nature de la question, qui ne sauroit subsister à moins que la figure du fil pour quelque moment, savoir $t = 0$, ne fut donnée; or alors, ayant $z = \Phi : x$, cela doit être précisément l'équation pour la figure initiale du fil, quelle qu'elle ait été, soit réguliere, soit irréguliere. Maintenant, connoissant cette figure, on en déterminera aisément la figure que le fil aura après un tems quelconque t; car à une abscisse quelconque x il repondra la même appliquée, qui repond dans la figure initiale à l'abscisse $x+at$.

11. C'est sur un semblable raisonnement qu'est fondée ma construction du probleme des cordes vibrantes, et qui est à présent mise a l'abri de toute objection. C'est aussi sur ce meme fondement que j'établirai la solution du probleme sur la propagation du son, et qui me dispensera des calculs embarrassans que M. De La Grande a été obligé de developper. Je conçois donc ce probleme sous le même point de vue que cet habile Géometre, en ne considérant que les particules de l'air qui sont situées sur une même ligne droite, suivant laquelle se fait la propagation du son. Car, quoique le son se répande de toute part également, il semble très certain que la propagation suivant chaque ligne droite n'est pas troublée par les mouvemens des particules voisines autour d'elle. Cependant il seroit bien à souhaiter qu' on pût résoudre cette question en déterminant l'agitation par toute l'étendue de l'atmosphere, mais on y rencontre des difficultés qui paroissent encore insurmontables. Je m'arrêterai donc, comme M. De La Grange, au seul mouvement qui se fait par une ligne droite.

ANALYSE POUR LA PROPAGATION DU SON SUR UNE LIGNE DROITE

12. Je ne considere donc qu'une seule étendue de l'air suivant la ligne droite AE (Fig. 1), tout comme si l'air étoit renfermé dans un tuyau infiniment

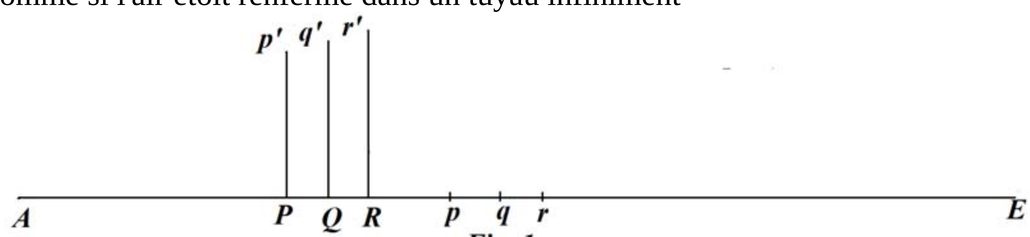

Fig. 1.

mince AE, que je supposerai de plus bouché par les deux extremites en A et E, afin que les circonstances auxquelles il faut appliquer le calcul soient parfaitement déterminées. Soit la longueur de ce tuyau $AE = a$ et sa largeur, que je suppose partout la même et quasi infiniment petite, $= ee$, de sorte que le volume d'air contenu dans ce tuyau soit $=aee$. Soit d'abord cet air en équilibre, ou de la même densité par toute la longueur du tuyau, de sorte que son élasticité soit aussi par toute la même; que la hauteur *h* soit la mesure de l'élasticité dans cet état d'équilibre, qu'il faut entendre en sorte, que l'élasticité soit balancée par le poids d'une colonne d'air, dont la hauteur $=h$, ou bien que chaque particule d'air dans le tuyau soit pressée de part et d'autre par le poids d'une masse d'air semblable, dont le volume est $=hee$, et que l'élasticité soit en équilibre avec cette pression.

13. Que cet air dans le tuyau ait maintenant essuyé une agitation quelconque, dont l'état d'équilibre soit troublé, et pour en répresenter l'effet, considérons trois points infiniment proches, qui dans l'état d'équilibre aient été en *P, Q, R* à des intervalles égaux et infiniment petits $PQ=QR=\omega$, et qui par l'agitation arrivée ayent été transportès aprés le tems $=t$ en *p, q, r,* de sorte que les particules d 'air comprises entre les points *P, Q, R* se trouvent maintenant entre les points *p, q, r* et partant plus ou moins condensées, selon que les intervalles *pq* et *qr* sont plus petits ou plus grands que les intervalles naturels *PQ* et *QR*, et 1'élasticité sera changée dans le même rapport. Pour connoitre ce changement, posons pour l'état d'équilibre les distances

$$AP=x,\ AQ=x'=x+\omega,\ AR=x''=x+2\omega$$

et pour l'état troublé

$$Pp=y,\ Qq=y',\ Rr=y'';$$

de là nous aurons les intervalles

$$pq=\omega+y'-y \ \text{ et } \ qr=\omega+y''-y'$$

et les masses des particules d'air qui y sont contenues seront les mêmes qui occupoient dans l'état d'équilibre les intervalles *PQ* et $QR=\omega$ et partant $=ee\omega$.

14. Qu'on observe ici que les quantités *x* se rapportent à l'état d'équilibre et qu'elles expriment la distance de chaque particule d'air depuis le point fixe *A*, mais que les quantités *y* marquent le dérangement de chaque particule causé par l'agitation qui lui convient aprés le tems *t*. Ainsi la particule d'air, qui dans l'état d'équilibre étoit eloignée du point fixe *A* de l'intervalle $=x$, s'entrouvera aprés le tems $=t$ de l'intervalle $=x+y$ et partant l'air ne sera pas en équilibre, à moins que toutes les *y* ne soient évanouissantes; si l'on met perpendiculairement aux points *P, Q, R* les appliqués *Pp', Qq', Rr'*, égales aux intervalles *Pp, Qq, Rr,* la ligne courbe qui passe par les points *p', q', r'* marquera l'état troublé de l'air dans le tuyau pour le tems; où il est evident que la premiere de ces appliquées en *A* et la dérniere en *E* doivent évanouir. Car puisque le tuyau est fermé par les deux extremites, les particules d'air en *A* et *E* ne sauroient s'eloigner de leurs places.

15. L'élasticité qui étoit dans l'état d'équilibre partout exprimée par la hauteur $=h$, sera à présent dans l'intervalle *pq* exprimée par une hauteur

$$=\frac{h\cdot PQ}{pq}$$

et dans l'intervalle *qr* par une hauteur

$$=\frac{h\cdot PQ}{pq}$$

Donc, ayant pose $PQ=QR=\omega$, puisque

$$pq=\omega+y'-y \text{ et } qr=\omega+y''-y',$$

la hauteur qui mesure l'élasticité dans intervalle *pq* sera

$$=\frac{h\omega}{\omega+y'-y}$$

et dans l'intervalle *qr*

$$=\frac{h\omega}{\omega+y''-y'}.$$

Or c'est de l'inégalité de ces hauteurs que dépend l'accélération ou retardation du mouvement de la particule en *q*. Pour cet effet, ayant partagé toute la longueur *AE* en des intervalles infiniment petits et égaux entr'eux $=\omega$, dont chacun contient un volume d'air $=ee\omega$, dans l'état d'équilibre concevons ces particules comme réunies dans les points *P, Q, R,* pour avoir maintenant en *q* un volume d'air $=ee\omega$, qui sera poussé en arriere vers *A* par une force

$$=\frac{eeh\omega}{\omega+y''-y'}$$

et en avant vers *E* par une force

$$=\frac{eeh\omega}{\omega+y'-y}.$$

16. Joignant ces deux forces, la particule d'air en *q* sera poussée selon la direction *qE* par la force qui est

$$=\frac{eeh\omega(y''-2y'+y)}{(\omega+y'-y)(\omega+y''-y')};$$

dont la distance depuis le point fixe *A* étant $Aq=x'+y'$, dont la partie *x'* demeure invariable par rapport au tems *t*, l'autre partie *y'* seule souffrira l'effet de cette force, et pendant l'élément de tems *dt*, on aura, conformément aux principes de Mecanique, en divisant par la masse $ee\omega$, cette equation

$$\frac{ddy'}{dt^2}=\frac{2gh(y''-2y'+y)}{(\omega+y'-y)(\omega+y''-y')},$$

où *g* marque la hauteur par laquelle un corps grave tombe dans une seconde, et alors le tems *t* sera exprime en secondes. Il s'agit donc de trouver pour chaque abscisse *x* et pour chaque tems *t* la valeur de l'intervalle *y*.

17. Considérous maintenant aussi *x* comme variable et il est clair que *y* sera une fonction des deux variables *x* et *t;* et puisque dans la formule $\frac{ddy}{dt^2}$ on suppose *x* constante, nous devons écrire $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ pour éviter toute ambiguité. Ensuite, l'autre membre de notre equation ne regarde que la variabilité de *x;* posant donc $\omega=dx$, nous aurons

$$y'-y=dx\left(\frac{dy}{dx}\right)\ \text{ et }\ y''-2y'+y=dx^2\left(\frac{ddy}{dx^2}\right);$$

d'ou notre équation prendra cette forme

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{ddy}{dx^2}\right):\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right),$$

qui seroit encore bien difficile à résoudre. Mais on suppose de plus, que les agitations sont extremêment petites et que les *y* évanouissent quasi par rapport aux *x;* au moins on peut se contenter de connoitre la propagation du son, quand les agitations sont fort petites, et alors, rejettant le terme $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, on aura à résoudre cette equation

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{ddy}{dx^2}\right).$$

18. Il en est ici de même que de la vibration des cordes, dont on suppose aussi infiniment petites les excursions, et nonobstant cela les Géometres prétendent avoir bien explique les mouvemens des cordes. Donc aussi dans notre cas je ne chercherai que les phenomenes des agitations extremêment petites, de sorte que la courbe qui passe par les points *p', q', r'* ne s'éloigne qu'infiniment peu de l'axe *AE,* tout comme on envisage la figure des cordes. Cette ressemblance va encore plus loin, puisque cette même équation qui exprime la propagation du son détermine aussi les ébranlemens d'une corde fixée par les termes *A* et *E.* Nous aurons donc aussi la même equation intégrale, qui dans toute son étendue est:

$$y=\Phi:(x+t\sqrt{2gh})+\Psi:(x-t\sqrt{2gh}).$$

Cette integrale est même complette, puisqu'elle renferme deux formes arbitraires de fonctions, tout comme la double intégration exige.

19. Pour déterminer la nature de ces deux fonctions, il en faut faire l'application aux conditions prescrites dans la question; et d'abord il est clair que, posant $t = 0$, l'équation

$$y = \Phi : x + \Psi : x$$

exprime l'état de l'air dans le tuyau lorsqu'il reçut la premiere agitation. Done, si nous posons que par l'agitation l'air dans le tuyau *AE* (Fig. 2) ait été réduit dans l'état répresente par la courbe

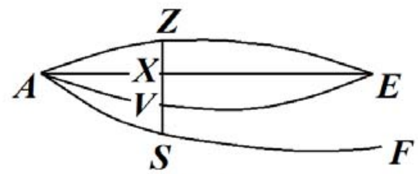

Fig.2

AZE, de sorte que chaque point X ait été transporte vers *E* par un intervalle $= XZ$, nommant $AX = x$ et $XZ = z$, nous aurons $z = \Phi : x + \Psi : x.$ Puisque *z* est une fonction donnée de *x,* soit elle $z = \Theta : x$ et nous aurons

$$\Phi : x + \Psi : x = \Theta : x,$$

d'où la nature de l'une de nos deux fonctions indéterminées Φ et Ψ sera déterminée. Or il faut bien remarquer que la courbe *AZE* doit être dans son étendue quasi infiniment proche de l'axe *AE;* cependant elle doit se réunir avec l'axe aux deux extremites *A* et *E,* de sorte que z soit très petite, et tout à fait $= 0$ aux cas $x = 0$ et $x = a$.

20. L'autre détermination doit être tirée du mouvement que toutes les particules d'air auront eu au premier moment de l'agitation. Concevons donc une autre courbe donnée *AVE,* dont les appliquées $XV = v$ expriment les vitesses qui ont été imprimées aux particules d'air *X* dans le sens *XE,* de sorte que *v* soit aussi une fonction donnée de *x.* Car, quelle que soit l'agitation, son premier effet sera toujours déterminé par ces deux courbes *AZE* et *AVE,* dont la premiere montre l'espace par lequel chaque particule à été transportée et l'autre montre la vitesse qui lui à été imprimée par ce mouvement. Si l'on veut que les particules d'air, ayant été poussées par les intervalles marques, y soient arrêtées et ensuite subitement relâchées, la courbe *AVE* conviendra avec l'axe *AE,* de sorte que par tout $v = 0$. Mais toujours il faut remarquer que les vitesses en à et *E* doivent être $= 0$.

21. Pour profiter de cette condition, cherchons en general la vitesse d'un point quelconque qui est $\left(\frac{dy}{dt}\right)$; il faut différentier nos fonctions et, employant pour cet effet les signes suivans

$$d. \Phi : u = du \ \Phi' : u \quad \text{et} \quad d.\Psi : u = du \ \Psi' : u\,,$$

la formule

$$y = \Phi : (x + t\sqrt{2gh}) + \Psi : (x - t\sqrt{2gh})\,,$$

en ne prenant que *t* pour variable, donnera

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)=\sqrt{2gh}\Phi':(x+t\sqrt{2gh})-\Psi':(x-t\sqrt{2gh})$$

et partant au commencement, où $t=0$ et la vitesse *v*, nous aurons

$$\frac{v}{\sqrt{2gh}}=\Phi':x-\Psi':x$$

Multiplions par *dx* et intégrons pour avoir

$$\frac{\int vdx}{\sqrt{2gh}}=\Phi:x-\Psi:x\,,$$

où $\int vdx$ ou l'aire *AXV*, étant aussi une fonction donnée de *x*, soit elle
, et nous aurons cette équation:

$$\Phi:x-\Psi:x=\frac{\Sigma:x}{\sqrt{2gh}}.$$

22. Cette équation jointe à celle que nous avons trouvée ci-dessus

$$\Phi:x+\Psi:x=\Theta:x$$

déterminera la nature de toutes les deux fonctions générales Φ et Ψ par les deux fonctions données Θ et Σ, d'où nous obtiendrons

$$\Phi:x=\tfrac{1}{2}\Theta:x+\frac{\tfrac{1}{2}\Sigma:x}{\sqrt{2gh}}\quad\text{et}\quad\Psi:x=\tfrac{1}{2}\Theta:x-\frac{\tfrac{1}{2}\Sigma:x}{\sqrt{2gh}}$$

Donc notre équation générale, qui marque aprés un tems quelconque *t* le lieu de la particule *X*, sera

$$y=\frac{\Theta(x+t\sqrt{2gh})+\Theta(x-t\sqrt{2gh})}{2}+\frac{\Sigma(x+t\sqrt{2gh})+\Sigma(x-t\sqrt{2gh})}{2\sqrt{2gh}}$$

et la vitesse de cette même particule vers *E* sera

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{\Theta'(x+t\sqrt{2gh})-\Theta'(x-t\sqrt{2gh})}{2}\sqrt{2gh}+\frac{\Sigma'(x+t\sqrt{2gh})+\Sigma'(x-t\sqrt{2gh})}{2},$$

où il faut remarquer que $\Sigma' : x = v$, puisque $\Sigma : x = \int vdx$.

23. Maintenant toute la solution seroit déterminée, si les deux extrémités *A* et *E* étoient éloignées à l'infini. Car, décrivant encore une autre courbe *ASF* dont les appliquées *XS* expriment les airés *AXV*, de sorte que $XS = \Sigma : x$, on pourroit prendre dans les deux courbes *ASF* et *AZE*, où $XZ = \Theta : x$, les appliquées qui répondent à toutes les abscisses $x + t\sqrt{2gh}$ et $x - t\sqrt{2gh}$ et de là on auroit pour tous les momens les quantités *y* qui conviennent à chaque particule d'air *x*. Mais, dès que le fil d'air *AE* est terminé par les points *A* et *E*, au delà desquelles l'agitation ne sauroit être communiquée, ces courbes formées sur le premier état de l'air ne fournissent plus les appliquées qui répondent aux abscisses $x + t\sqrt{2gh}$, quand elles sont plus grandes que $AE = a$, ni aux abscisses $x - t\sqrt{2gh}$, quand elles sont négatives. Il ne s'agit pas ici de la continuation naturelle de ces courbes, qui n'entre en aucune considération, puisque les courbes données *AZE* et *ASF* pourroient être même discontinues.

24. Nous avons donc besoin de quelques déterminations accessoires, qui nous découvrent les véritables appliquées de nos deux courbes données, lorsqu'on prend, ou l'abscisse plus grande que $AE = a$, ou négative. Pour cet effet nous n'avons qu'à regarder les conditions mentionnées ci-dessus, que prenant ou $x = 0$ ou $x = a$, l'appliquée *y* doit toujours demeurer $= 0$; d'où nous tirons

$$\Theta : t\sqrt{2gh} + \Theta : -t\sqrt{2gh} + \frac{\Sigma : t\sqrt{2gh} - \Sigma : -t\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gh}} = 0$$

et

$$\Theta : \left(a + t\sqrt{2gh}\right) + \Theta : \left(a - t\sqrt{2gh}\right) + \frac{\Sigma : \left(a + t\sqrt{2gh}\right) - \Sigma : \left(a - t\sqrt{2gh}\right)}{\sqrt{2gh}} = 0.$$

Ayant donc une abscisse, ou plus grande que *a*, comme $a + u$, ou négative comme $-u$, nous aurons

$$\Theta : (a+u) + \frac{\Sigma : (a+u)}{\sqrt{2gh}} = -\Theta : (a-u) + \frac{\Sigma : (a-u)}{\sqrt{2gh}}$$

et

$$\Theta : (-u) + \frac{\Sigma : (-u)}{\sqrt{2gh}} = -\Theta : u - \frac{\Sigma : u}{\sqrt{2gh}},$$

d'où l'on pourra toujours assigner ces appliquées par celles qui se trouvent actuellement entre les limites *A* et *E*.

DE LA PROPAGATION DU SON

25. Maintenant, pour expliquer la propagation du son par la ligne *AE* (Fig.3), supposons que par quelque force une petite partie d'air *mn* ait été ébranlée et mise dans l'état représenté par la petite courbe *mon*, où l'air ayant été en repos soit relâché subitement, tandis que le reste en *Am* et *nE* soit

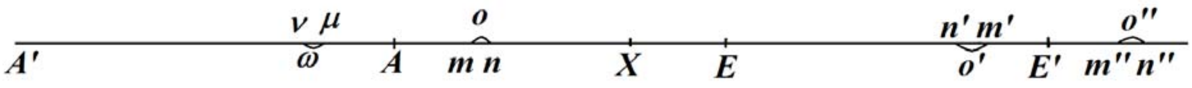

Fig. 3

encore dans un parfait équilibre, et voyons comment ce dérangement se communique successivement avec les autres particules de l'air. Dans cette hypothese la fonction Σ évanouit et il ne reste que la function Θ, qui exprime les appliquées de la courbe *mon*, tant que les abscisses tombent dans l'espace *mn*. Or, puisqu'au commencement, où $t=0$, les particules d'air hormis l'espace *mn* sont en équilibre, la ligne entiere qui représente cet état initial sera composée de la droite *Am*, de la courbe *mon* et de la droite *nE* et partant une ligne mixtiligne *AmonE*, dans laquelle, prenant une abscisse $=u$, l'appliquée donnera la valeur de $\Theta:u$. Ensuite, puisque $\Theta:(-u)=\Theta:u$, il faut dans la continuation précédente $AA'=a$ concevoir la même ligne $A\mu\omega\nu A$ dans une situation renversée. De plus, puisque

$$\Theta:(a+u)=-\Theta:(a-u),$$

il faut dans la continuation *EE'* établir la même ligne aussi renversée et ainsi de suite pour les autres intervalles $=a$ pris sur cette ligne de part et d'autre.

26. De là on voit que l'appliquée $\Theta:u$ sera toujours $=0$, a moins que l'abscisse *u*, à compter depuis le point *A* en droite, ne tombe ou entre les limites

$$\begin{cases}Am\\An\end{cases}\text{ ou entre }\begin{cases}An'\\Am'\end{cases}\text{ ou entre }\begin{cases}Am''\\An''\end{cases}\text{ etc.}$$

$$\text{ou entre }\begin{cases}-A\mu\\-A\nu\end{cases}\text{ ou entre }\begin{cases}-A\nu'\\-A\mu\end{cases}\text{ etc.}$$

Donc, si nous posons $Am=m$ et $An=n$, ces limites hors desquelles l'appliquée $\Theta:u$ est partout $=0$, seront

$$\text{ou }\begin{cases}m\\n\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}2a-n\\2a-m\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}2a+m\\2a+n\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}4a-n\\4a-m\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}4a+m\\4a+n\end{cases}\text{ etc.}$$

$$\text{ou }\begin{cases}-m\\-n\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}-2a+n\\-2a+m\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}-2a-m\\-2a-n\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}-4a+n\\-4a+m\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}-4a-m\\-4a-n\end{cases}\text{ etc.}$$

En général donc deux limites quelconques seront

$$\begin{cases} \pm 2ia \pm m \\ \pm 2ia \pm n \end{cases}$$

et à moins que l'abscisse *u* ne tombe entre deux telles limites, l'appliquée $\Theta : u$ sera toujours $= 0$.

27. Prenons à présent un point quelconque *X* sur la droite *AE*, posant $AX = x$, et cherchons les agitations qu'il subira, que nous connoitrons par la quantité *y* dont la valeur après le tems *t* est

$$y = \frac{1}{2}\Theta : (x + t\sqrt{2gh}) + \frac{1}{2}\Theta : (x - t\sqrt{2gh}),$$

et d'abord nous voyons que le premier membre est $= 0$, à moins que $x + t\sqrt{2gh}$ ne tombe entre les limites

$$\begin{cases} m \\ n \end{cases} \text{ou} \begin{cases} 2a - n \\ 2a - m \end{cases} \text{ou} \begin{cases} 2a + m \\ 2a + n \end{cases} \text{etc.}$$

Or, l'autre membre évanouit toujours, à moins que la quantité $x - t\sqrt{2gh}$ ne tombe entre les limites $\begin{cases} m \\ n \end{cases}$ ou son négatif $t\sqrt{2gh} - x$ entre

$$\begin{cases} m \\ n \end{cases} \text{ou} \begin{cases} 2a - n \\ 2a - m \end{cases} \text{ou} \begin{cases} 2a + m \\ 2a + n \end{cases} \text{etc.}$$

Donc, si nous supposons $AX = x > n$, cette particule demeurera en repos jusqu'à ce qu'il devienne

$$x - t\sqrt{2gh} = n \quad \text{ou} \quad t = \frac{x - n}{\sqrt{2gh}}.$$

Ce n'est donc qu'après ce tems, que la particule en *X* commence à s'ébranler et ensuite elle sera rétablie en repos après le tems $\dfrac{x - m}{\sqrt{2gh}}$ de sorte que l'ébranlement durera un tems $\dfrac{n - m}{\sqrt{2gh}}$. D'où l'on voit que chaque particule d'air n'est ébranlée que pendant un très petit tems selon l'étendue de l'agitation initiale *mn*, et c'est alors que le son y est senti.

28. Il faut donc un tems $t = \frac{x-n}{\sqrt{2gh}}$, avant que le son parvienne de *n* en *X*, ou qu'il soit transmis par l'espace $nX = x - n$. D'où l'on voit que ce tems est proportionel à l'espace, tout comme on le sait par l'expérience. J'ai déjà remarqué que le tems *t* est exprimé en secondes, si l'on prend pour *g* la hauteur d'où tombe un corps grave dans une seconde; donc, pendant une seconde, posant $t = 1$, le son sera transmis par un espace $= \sqrt{2gh}$. Or on sait que $g = 15\tfrac{5}{8}$ pieds de Rhin, et si le ressort de l'air est contrebalancé par une colonne d'eau de 32 pieds, en supposant l'eau 800 fois plus pesante que l'air, la hauteur *h* sera $= 32 \cdot 800$ pieds, d'où l'on trouve

$$\sqrt{2gh} = \sqrt{31\tfrac{1}{4} \cdot 32 \cdot 800} = 400\sqrt{5} = 894 \text{ pieds.}$$

Or on sait que le son est transmis dans une seconde par un espace de presque 1100 pieds et personne n'a encore bien découvert la cause de cette accélération sur la théorie.

29. Mais, après que la particule d'air en *X* a été ébranlée la premiere fois, elle sera depuis mise en agitation encore plusieurs et même une infinite de fois, car elle se trouvera agitée toutes les fois que le tems écoulé *t* sera contenu entre les limites suivantes:

$$t\sqrt{2gh} = \begin{cases} x+m,\ 2a-n-x,\ 2a-n+x,\ 2a+m-x,\ 2a+m+x \ \text{ etc.} \\ x+n,\ 2a-m-x,\ 2a-m+x,\ 2a+n-x,\ 2a+n+x \ \text{ etc.} \end{cases}$$

Si la ligne *AE* n'étoit point du tout terminée, la particule en *X* ne seroit ébranlée qu'une seule fois; si elle n'étoit terminée qu'à une extremité *A*, la distance $AE = a$ étant infinie, elle recevrait encore un ébranlement après le tems $= \frac{x+m}{\sqrt{2gh}}$, ce qui est l'explication d'un écho simple. Mais, si la ligne *AE* est terminée par les deux bouts *A* et *E*, l'ébranlement arrivera plusieurs fois de suite, ce qui sert à expliquer les échos réitérés. Pour cet effet, il faut que les dernieres particules d'air en *A* et *E* ne soient succeptibles d'aucun ébranlement, ce qui est une condition nécessaire pour la production des échos.

30. Puisque nous avons trouvé

$$y = \frac{1}{2}\Theta:(x + t\sqrt{2gh}) + \frac{1}{2}\Theta:(x - t\sqrt{2gh}),$$

il faut encore remarquer que l'ébranlement de la particule *X* n'est que la moitié de celui dont la particule *mn* a été primitivement agitée. Car la quantité *y* ne reçoit de grandeur que lorsque l'un ou l'autre membre tombe dans l'intervalle *mn* et puisque tous les deux n'y sauroient tomber a la fois, la quantité *y* ne deviendra égale qu'à la moitié de l'appliquée dans l'intervalle *mn,* d'où il s'ensuit que les agitations de la particule *X* sont deux fois plus foibles que l'agitation primitive dans la particule *mn.* Cela est aussi une suite nécessaire du principe, que l'effet ne sauroit être plus grand que la cause; car, puisque l'agitation originaire en *mn* se communique également vers *A* et *E*, à chaque instant il y aura deux particules également éloignées de part et d'autre de *mn* qui seront ébranlées, dont les mouvemens pris ensemble doivent être égaux au mouvement primitif en *mn*, de sorte que chacun n'en puisse être que la moitié. Mais cette diminution sera bien plus grande, quand l'agitation en *mn* sera répandue en tous sens; d'où l'on voit que les sons transmis par un tuyau doivent être plus forts.

EXPLICATION D'UN PARADOXE

31. Il se présente ici un doute, qui n'est pas si facile à lever; il semble que l'agitation qui se trouve à présent en *X*, pourroit être regardée comme l'agitation primitive en *nn* et qu'elle devroit être transmise aussi bien en arriere qu'en avant; cependant cela n'arrive pas, puisque nous venons de voir, que l'agitation qui est à présent en *X*, se transmet successivement en avant vers *E* et point du tout en arriere vers *A;* il en est de même des agitations, qui de *mn* se répandent en sens contraire vers *A*, qui sont transmises dans le même sens, sans qu'elles engendrent de nouvelles agitations en sens contraire. Je fais ici abstraction des limites *A* et *E*, ou je les considère comme éloignées à l'infini, puisque je ne les ai introduites dans le calcul que pour expliquer les *échos*. On demandera donc avec raison, quelle est la difference entre l'agitation primitive en *mn* et celle qui en est engendrée depuis en *X*: car, si tout est en repos excepté les particules auprès de *X*, qui se trouvent déplacées de leur état naturel, il semble que cette agitation pourroit être envisage comme la primitive et qu'elle devroit se communiquer aussi bien vers *A* que vers *E*. Cependant cela seroit tout à fait contraire à l'expérience et l'on sait qu'il y a une grande différence entre le lieu où le son est engendré et ceux où il est apperçu.

32. Il faut donc qu'il y ait une différence essentielle entre l'agitation communiquée aux particules d'air en *X* et l'agitation primitive en *mn;* et tout revient à découvrir cette différence. Or, ayant introduit dans le calcul l'agitation primitive en *mn*, j'y ai supposé une restriction, en négligeant les fonctions marquées par le signe Σ, qui renferme cette condition, que les particules de l'espace *mn*, ayant été déplacées de leur situation naturelle, se soient trouvées sans aucun mouvement et que de cet état elles ayent été relâchées subitement. De là il faut bien conclure que, si les particules de *X*, après avoir été déplacées, se trouvaient tout à la fois en repos, il en devroit résulter le même effet que de l'agitation primitive en *mn*. Mais, quoique chaque particule de *X*, étant parvenue à sa plus grande digression, y soit réduite en repos, cela n'arrive pas dans toutes les particules qui sont autour de *X* au même instant et partant c'est ici, sans doute, qu'il faut chercher l'explication de notre difficulté.

33. De là on comprend que la propagation dépend non seulement du déplacement des particules en *mn*, mais aussi du mouvement qui leur aura été imprimé au premier instant, qui influe tant sur la propagation, que dans un certain cas elle ne se fait que dans un sens. Il est donc bien important de traiter ce sujet dans toute son étendue, sans négliger les fonctions du signe Σ. Pour cet effet je ne me bornerai pas à une ligne ou tuyau terminé et je le supposerai infini, puisqu'il ne s'agit plus des échos. Qu'au commencement donc les particules d'air contenues dans l'espace *mn* (Fig. 4) ayent

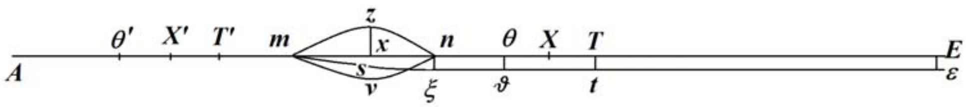

Fig. 4.

été ébranlées, en sorte que le point x ait été transporté vers E par un espace $= xz$ appliquée de la courbe donnée mzn, et qu'à ce même point ait été imprimée alors une vitesse $= xv$ aussi dans le même sens vers E, où xv, appliquée de la courbe donnée mvn, exprime l'espace que cette vitesse parcouroit dans une seconde. Qu'on forme par la quadrature de cette courbe mvn une nouvelle, $ms\zeta$, en sorte que son appliquée $xs = \frac{mxv}{\sqrt{2gh}}$, et puisque a ligne de vitesse mvn se confond de part et d'autre de l'espace mn avec l'axe meme mA et nE, la continuation de la courbe $ms\zeta$ sera vers A l'axe même mA et vers E la droite ζs parallele à l'axe nE.

34. Cela posé, prenant un point quelconque X et posant $AX = x$, après le tems $= t$ il sera poussé vers E par un espace y, de sorte que

$$y = \frac{1}{2}\Theta:(x+t\sqrt{2gh}) + \frac{1}{2}\Theta:(x-t\sqrt{2gh}) + \frac{1}{2}\Sigma:(x+t\sqrt{2gh}) - \frac{1}{2}\Sigma:(x-t\sqrt{2gh}),$$

puisqu'ici le dénominateur $\sqrt{2gh}$ qui se trouve § 22 est déjà renfermé dans la function Σ. Or ici Θ marque les appliquées de la courbe mzn, qui de part et d'autre de l'espace mn se confond avec l'axe, de sorte que $\Theta:u$ est toujours zéro, à moins que u ne soit compris entre les limites Am et An, où A est un point fixe pris à volonté, d'où je compte les abscisses, sans que le tuyau y soit terminé ou fermé. De la même maniere, le caractere Σ marque les appliquées de la ligne $Ams\xi\varepsilon$, de sorte que la valeur de $\Sigma:u$ est zéro, quand $u < Am$, et égale à $n\zeta = Ee$, quand $u > An$. Or, si u se trouve entre ces deux limites, comme si $u = Ax$, alors on aura $\Sigma:u = xs$. Il n'est pas besoin d'avertir que, si quelque appliquée tombait en sens contraire, qu'elle est représentée dans la figure, il la faudrait considérer comme négative.

35. Considérons premierement un point X plus éloigné du point fixe A que l'intervalle mn, et puisque $AX = x$, prenons de part et d'autre les intervalles $XT = X\Theta = t\sqrt{2gh}$, pour avoir $AT = x + t\sqrt{2gh}$ et $A\Theta = x - t\sqrt{2gh}$, et il est clair que, tant que $X\Theta < Xn$, il y aura

$$y = \tfrac{1}{2}Tt - \tfrac{1}{2}\Theta\vartheta = 0,$$

puisque

$$\Theta: AT = 0,\ \Theta: A\Theta = 0 \ \text{ et } \ \Sigma: AT = Tt,\ \Sigma: A\Theta = \Theta\vartheta.$$

Or, quand le point Θ tombe dans l'espace *mn*, ou que $X\Theta = t\sqrt{2gh} = Xx$,
on aura

$$\Theta : AT = 0,\ \Theta : Ax = xz,\ \ \Sigma : AT = Tt = n\zeta \text{ et } \Sigma : Ax = xs$$

et partant

$$y = \tfrac{1}{2}(xz + n\zeta - xs),$$

qui est l'espace par lequel le point *X* sera transporté de son lieu naturel vers *E* après le tems $t = \frac{Xx}{\sqrt{2gh}}$. Mais, après le tems $t = \frac{Xm}{\sqrt{2gh}}$ on aura $y = \frac{1}{2}n\zeta$,

qui demeurera aussi la valeur de *y*, lorsque $t > \frac{Xm}{\sqrt{2gh}}$; de sorte que depuis ce tems il sera en repos, quoiqu'éloigné de son lieu naturel de l'espace $\frac{1}{2}n\zeta$, son agitation n'ayant duré que depuis le tems $t = \frac{Xn}{\sqrt{2gh}}$ jusqu'au tems $t = \frac{Xm}{\sqrt{2gh}}$

36. Considérons maintenant un point quelconque *X'* de l'autre côté de l'espace ébranlé *mn*, de sorte que $AX' = x$, et, prenant de part et d'autre les intervalles égaux $X'T' = X'\Theta' = t\sqrt{2gh}$, on voit que, tant que $X'T' < X'm$, ou $t = \frac{X'm}{\sqrt{2gh}}$, le point *X'* restera en repos; mais, si *T'* avance en *x*, de sorte que $t = \frac{X'x}{\sqrt{2gh}}$, à cause de

$$\Theta : A\,x = xz,\ \Theta : A\Theta' = 0,\ \Sigma : A\,x = xs \text{ et } \Sigma : A\Theta' = 0,$$

on aura

$$y = \tfrac{1}{2}xz + \tfrac{1}{2}xs = \tfrac{1}{2}(xz + xs),$$

et après le tems $t = \frac{X'n}{\sqrt{2gh}}$ on aura

$$y = \tfrac{1}{2}n\zeta,$$

qui demeurera depuis constamment la valeur de *y*, de sorte que cette particule *X'* aussi, après avoir été ébranlée, se trouvera éloignée de son lieu naturel vers *E* de l'intervalle $= \frac{1}{2}n\zeta$. Donc, après que tous les ébranlemens seront passés, toute la ligne d'air *AE* sera avancée dans la direction *AE* de l'intervalle $\frac{1}{2}n\zeta$.

37. De là on voit que les ébranlemens des particules *X* et *X'*, dont l'une est en deça et l'autre au delà de l'agitation primitive *mn*, sont tout à fait différentes, vu qu'en *X* le plus grand déplacement est $= \frac{1}{2}(xz - xs + n\zeta)$ et en $X' = \frac{1}{2}(xz + xs)$, et partant dans ce cas le son est tout autrement transmis en avant qu'en arriere, au lieu que, dans le cas précédent, où les vitesses primitives *xv* évanouissoient, la propagation étoit de part et d'autre

la même. Mais on voit de plus, qu'il seroit possible que la propagation se fît seulement dans un sens; ce qui arriverait, s'il y avoit par tout l'espace *mn* $xz - xs + n\zeta = 0$. Pour cet effet, puisque *xz* et *xs* évanouissent en *m*, il faudroit qu'il fût $n\zeta = 0$ et $xs = xz$. Posant donc

$$xz = z,\ xv = v \text{ et } xs = \frac{\int vdx}{\sqrt{2gh}},$$

cette condition exige qu'il soit

$$z\sqrt{2gh} = \int vdx \text{ et } v = \frac{dz\sqrt{2gh}}{dx}.$$

Dans ce cas la courbe $ms\zeta$ sera égale et semblable à l'autre et se rejoindra en *n* avec l'axe, de sorte que $n\zeta = 0$. Alors les particules *X* situées d'une part de l'espace ébranlé *mn* vers *E*, n'en seront point ébranlées et la propagation ne se fera que vers l'autre part de *m* vers *A*.

38. Or, c'est précisément le cas des ébranlemens qui sont produits par une agitation primitive quelconque, lesquels sont toujours tels que, quand même ils seraient primitifs, ils ne se communiqueroient que dans un sens. Pour s'en asseurer on n'a qu' à donner à *z* la valeur de *y* trouvée ci-dessus et à *v* la valeur de $\left(\frac{dy}{dt}\right)$; alors on aura

$$z = \frac{1}{2}\Theta:(x+t\sqrt{2gh}) + \frac{1}{2}\Theta:(x-t\sqrt{2gh}) + \frac{1}{2}\Sigma:(x+t\sqrt{2gh}) - \frac{1}{2}\Sigma:(x-t\sqrt{2gh}),$$

$$\frac{v}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{2}\Theta':(x+t\sqrt{2gh}) - \frac{1}{2}\Theta':(x-t\sqrt{2gh}) + \frac{1}{2}\Sigma':(x+t\sqrt{2gh}) + \frac{1}{2}\Sigma':(x-t\sqrt{2gh}),$$

et prenant le différentiel de *z*, en ne supposant que *x* variable,

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{1}{2}\Theta':(x+t\sqrt{2gh}) + \frac{1}{2}\Theta':(x-t\sqrt{2gh}) + \frac{1}{2}\Sigma':(x+t\sqrt{2gh}) - \frac{1}{2}\Sigma':(x-t\sqrt{2gh})$$

Or, il n'y a toujours, comme nous avons vu ci-dessus, que l'une des deux abscisses $x+t\sqrt{2gh}$ ou $x-t\sqrt{2gh}$ à laquelle réponde une appliquée finie.
Donc, si c'est la premiere, il y aura évidemment

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{v}{\sqrt{2gh}};$$

et partant une telle agitation ne sauroit se communiquer que dans un seul sens. Voilà donc la véritable explication du paradoxe proposé.

POURQUOI PLUSIEURS SONS NE SONT PAS CONFONDUS

39. De là on comprend clairement la raison, pourquoi plusieurs sons ne sont pas confondus, question qui a de tout tems tourmenté les Physiciens. La théorie du grand NEWTON, quoique juste au fond, ne paroit pas suffisante pour expliquer ce phénomene, puisqu'elle ne détermine point la veritable nature des ébranlemens auxquels toutes les particules de l'air sont assujetties M. De Mairan s'est imaginé que chaque son, selon qu'il est grave ou aigu, n'est transmis que par certaines particules d'air, dont le ressort lui est convenable. Mais, outre que l'état d'équilibre demande absolument que toutes les particules d'air soient douées d'un même degré de ressort, cette explication est renversée par les premiers principes sur lesquels notre théorie est fondée et dont la certitude ne sauroit être révoquée en doute. En effet, la propagation ne se rapporte qu'à un seul ébranlement excité dans l'air et il n'importe pas, si celui-ci est suivi des autres ou non, et encore moins dépend-elle de l'ordre de leur succession, d'où l'on juge le grave et l'aigu des sons.

40. Pour s'éclaircir entierement là dessus on n'a qu'à supposer plusieurs agitations primitives a, b, c, d, α, β etc. sur la ligne droite *AE* (Fig. 5) et,

Fig. 5

en considérant une particule d'air quelconque en *P*, on voit par ce que je viens d'expliquer que l'agitation α lui sera communiquée après le tems $\frac{P\alpha}{\sqrt{2gh}}$; ensuite elle recevra l'agitation *a* après le tems $\frac{Pa}{\sqrt{2gh}}$ et ainsi des autres, de sorte que chaque agitation est transmise par la même particule *P* dans un tems déterminé et une oreille placée en *P* percevra tous ces ébranlemens, sans que les uns soient troublés par les autres. Il pourra aussi arriver que deux ébranlemens arrivent au même instant à la même particule, comme *O*, les distances *aO* et αO étant égales; mais alors cette particule sera tout autrement ébranlée, que si elle recevoit une simple agitation, et elle communiquera ensuite son ébranlement tant en avant qu'arriere. Or, c'est précisément le cas où l'on devroit penser que les agitations se confondissent, ce qui n'arrive pas pourtant, aussi peu en *O* qu'en tout autre point *P*.

REFLEXIONS SUR LA THEORIE PRECEDENTE

41. D'abord il fant remarquer que je n'ai ici considéré la propagation que sur une ligne droite, on comme si l'air étoit renfermé dans un tuyau cylindrique fort étroit; d'où l'on pourroit penser que dans un air libre elle devroit suivre des loix tout à fait différentes. Du moins est-il évident que les agitations, étant répandues en tons sens, doivent diminuer bien plus considérablement que dans le cas d'un tuyau; mais, pour ce qui regarde la nature des ébranlemens et la vitesse dont elles sont transmises à des distances quelconques, il semble certain qu'il en sera de même dans l'air libre que dans un air renfermé dans un tuyau; car, puisque le son, de même que la lumiere, se communique par des lignes droites, qu'on peut nommer des rayons sonores, la transmission par chacune de ces lignes droites doit suivre les mêmes regles que je viens de découvrir, avec cette seule différence que les agitations deviendront d'autant plus foibles, plus sera grande la distance. Cependant il seroit fort à souhaiter qu'on fût en état de résoudre le même probleme dans le cas d'un air libre.

42. En second lieu, c'est toujours une grande difficulté, que le son parcourt effectivement un plus grand espace que celui que la théorie indique; je reconnois à présent que les ébranlemens suivans n'en sauroient être la cause, comme je me l'étois imaginé autrefois. Mais il faut bien comparer le cas de l'expérience avec celui auquel la théorie est adstreinte. Sans prétendre que l'air libre puisse causer cette différence, il faut se souvenir que notre calcul suppose des agitations quasi infiniment petites, qui produiroient des sons trop foibles, pour qu'on puisse observer la distance de leur propagation pendant une seconde. Donc, puisque les sons qu'on a employés dans les expériences sont produits par des agitations très fortes, il est fort vraisemblable que dans l'équation principale §17, qui est

$$\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

il n'est plus permis de négliger le terme $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, comme j'ai fait dans le calcul précédent.

Peut-être que c'est ici qu'il faudroit chercher le développement de cette difficulté.

43. Enfin, quoique ce soit à Mr. De La Grange qu'on est redevable de cette importante découverte, je me flatte que ce Mémoire ne manque pas de recherches très intéressantes. Car, outre que mon analyse est très simple, j'y ai mis dans tout son jour l'usage des fonctions discontinues, contesté par quelques grands Géometres, mais qui est absolument nécessaire toutes les fois qu'il s'agit de trouver par intégration des fonctions de deux ou plusieurs variables, et que l'on demande une solution générale. Ensuite, quoique la résolution soit semblable à celle des cordes vibrantes, que j'ai donnée autrefois, j'ai ici déterminé avec plus d'exactitude les fonctions arbitraires par les conditions propres à la nature de la question. Mais aussi cette solution appliquée aux cordes est plus générale, puisque pour l'état initial on ne peut pas seulement donner à la corde une figure quelconque, mais aussi à tous ses élémens un mouvement quelconque; ce que je n'avois pas remarqué dans mon Mémoire là dessus, ni même ceux qui ont traité la même matiere. Enfin je crois que l'explication du paradoxe, que les ébranlemens causés par la propagation du son sont d'une nature tout à fait différente que les primitifs, nous fournit des éclaircissemens très considérables dans cette matiere épineuse.