

CHAPTER 1

ON ARITHMETIC OR THE GENERAL ART OF RECKONING

1. *Arithmetic, or the art of reckoning, is the branch of learning which teaches us about the nature and properties of numbers, and likewise gives some rules at hand, by means of which one can calculate or resolve most of the tasks occurring in everyday life.*

Arithmetic, or the art of reckoning, all of which is to be dealt with here, is a part of mathematics; therefore it will lead to greater clarification, on being affected to some extent by what this discipline represents. Mathematics accordingly is a discipline, which teaches us how we can become familiar with different magnitudes, so that what is still unknown may be found. So that now, with that being treated by mathematics, either the amount is known or is to be sought. If we consider all the parts of mathematics, thus we will find, that the matter always returns to this, how an unknown quantity may be able to be found from another quantity already known. But the various parts of mathematics arise from the different kinds of magnitudes, in that each one is to be treated only in a particular manner. Now numbers are a particular kind of magnitude, and arithmetic is that part of mathematics, which gets around these difficulties with numbers only. We can also say accordingly, that arithmetic is a discipline, which teaches, how we may find an unknown number either from known or given numbers ; how we then know, that in all arithmetical operations a number always will be found, the previously unknown. But how arithmetic generally tends to be affected, thus the same is understood to grasp still more operations and rules within itself, as can be derived merely from the nature and kind of the numbers. We are used namely to attend to some rules with the proper arithmetic, which have their foundations in general analysis or algebra, to associate with that a man who learns the same may also be able to resolve most of the tasks that normally occur in ordinary life, without being trained in algebra. Whether or not these rules belong to the science of numbers, it is still necessary, for the sake of a cause invoked, to keep them united. And therefore, in the beginning, we assume the consideration of numbers, arithmetic would provide some rules, which can accomplish most of the bills in ordinary trade and change. And so, in the beginning, we have presumed that besides the consideration of numbers, arithmetic would provide some rules, which can accomplish most of the bills in ordinary trade and change.

2. *Arithmetic is thus best divided into two parts, of which the first comprehends in itself all that which is based on the nature of numbers alone . The other part, however, contains those rules which can be usefully employed in most cases, such as are forthcoming in ordinary life.*

The first part is, as noted already, that in arithmetic itself, all its foundations flow solely from the nature and properties of numbers. And therein the so-called species pertain partly to whole numbers, partly to fractional numbers, in that they rest entirely on

the nature of numbers. But whether these species or operations equally find their place in all kinds of reckoning, and also all the most difficult calculations can performed by these alone ; they are nevertheless to be regarded however only as the tool, whereby the same calculations are able to be carried out. On the other hand, in such cases, the most prominent thing is to know what operations one must avail oneself at every opportunity in order to find the desired outcome. For it is not good enough to understand the remembered arithmetical operations, but also one must know a rule for each case which explains what kinds of operations need to be used to find what is required to be known. These rules do not have their foundations in arithmetic; since they depend either on general analysis or on algebra; as where for any kind of task unusual rules are derived from the circumstances, by means of which help one can arrive at the right resolution. Thus, many such rules as required are taken from algebra into arithmetic as are necessary to calculate the usual outcomes from the calculation. Such figures have been included in arithmetic : Regula Detri, Regula Quinque, Regula Alligationis, Regula Falsi, etc., as without which an arithmetical master, who is not practiced in algebra, can scarcely come forth.

3. If so many pieces of a kind shall be at hand, this multiplicity is indicated by a number. And that is how one understands by a number how many pieces is being discussed .

Then in the first part of the calculation the nature of the numbers shall be investigated, and from that these operations to be discussed, which are necessary for the completion of the forthcoming rules which appear in the second part; So before all things you have to bring away a clear notion of the numbers. This happens most preferably by considering which of these has been called one; a number indicating how many pieces of the same variety may be present. As if for example one hears talk of a hundred rubles, one understands that one hundred pieces of that thing which is called the ruble are named; or the number one hundred indicates how many pieces, each one of which is a ruble, are in question. But as to the bulk of the numbers, it is supposed here in the first place that anyone who is prepared to learn arithmetic has a notion of the size of each number, and knows the words that will be named for the numbers. For this, however, it suffices only to be able to name the number which arises when one more is added to a given number. Then, in this way, a man will be able to go on counting as far as one requires; and is given a clear notion of the number of parts that each number implies.

4. All numbers, however great they may be, are taken care of in a very short and easy way to be expressed by the following ten characters or signs: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. The meaning of each one thereof is well known, when considered alone, and therefore needs no further explanation.

It is not enough for arithmetic operations either to name or write any number with its proper name; but it will be in order to facilitate the same operations that the numbers are indicated by special and convenient signs or characters. This can now be done in many ways, the easiest and simplest of which is where just as many dots or strokes are placed

one behind the other as the number means, as if, as an example, eight were written in this way 11111111. But this representation, if the numbers are very large, is subject to being spread out too much and to for the meaning to be unclear ; in the first place, a long time and a large space is required for a large number to be written, and afterwards also, even if such a number were written, the number would be very difficult to discern. According to the Roman style of writing, to be sure this extensive and unclear manner of writing is somewhat reduced by writing this sign V instead of five strokes, instead of ten of these the sign X, and so forth ; but since this representation is still fairly spacious and unclear for large numbers, and not sufficiently restricted by fixed rules, it is not convenient to arrange arithmetical operations according to this method. Subjected to still more difficulties are these methods, of writing numbers, in which the capital letters of Alphabets indicate the numbers to be used ; likewise being used before by most people. Outstanding before these kinds, the current now almost universal usable way of writing numbers with the aid of the ten cited signs, has a great advantage, as can be seen more from several of the following.

[See Cajori's *A History of Mathematical Notations* for an extensive review of such matters.]

5. In this type of writing of the numbers, the above ten signs do not always have a single meaning: but to find the true value of each character, you must pay attention to the place of the same. As in the first place to the right going to the left, the character retains its natural meaning as if it were put in place first alone. In the second place, a character means ten times more than if it were alone. In the third place a character means a hundred times more, in the fourth place a thousand times more, and so forth, always ten times more than the following place, as from the preceding.

Here it is to be noted that the sign 0 means nothing in all places, because ten times nothing and one hundred times nothing and so on always amounts to nothing. But just as the increase of the meaning of the other signs is to be provided according to the places, it is to be noted that the value of any character is ten times greater than in the preceding passage to the right. And in this way it is necessary to become acquainted with the following table:

Ten times one makes ten
Ten times ten makes one hundred
Ten times one hundred makes one thousand
Ten times one thousand ten thousand
Ten times ten thousand makes one hundred thousand
Ten times one hundred thousand makes one thousand thousand or one million
One thousand times one thousand Million makes one Billion
One thousand times one thousand billion makes one Trillion
and so on.

So from this table you get an understanding of the numbers ten, hundred, thousand and so on; because one can see from that, how many places each number represents.

Ch. 1 of Euler's E17:
ARITHMETIC OR THE GENERAL ART OF RECKONING.
Translated from German by Ian Bruce; 6/6/2018.
Free download at 17centurymaths.com.

4

From this, moreover, one can deduce further how much each character of the ten considered means in each place. Namely, in the first place, going from right to left means as follows:

I.

0 = nothing	5 = five
1 = one	6 = six
2 = two	7 = seven
3 = three	8 = eight
4 = four	9 = nine.

But at the second place means

II.

0 = nothing	5 = fifty
1 = ten	6 = sixty
2 = twenty	7 = seventy
3 = thirty	8 = eighty
4 = forty	9 = ninety.

At the third place means

III.

0 = nothing	5 = five hundred
1 = hundred	6 = six hundred
2 = two hundred	7 = seven hundred
3 = three hundred	8 = eight hundred
4 = four hundred	9 = nine hundred.

At the fourth place means

IV.

0 = nothing	5 = five thousand
1 = one thousand	6 = six thousand
2 = two thousand	7 = seven thousand
3 = three thousand	8 = eight thousand
4 = four thousand	9 = nine thousand.

At the fifth place means

V.

0 = nothing	5 = fifty thousand
1 = ten thousand	6 = sixty thousand
2 = twenty thousand	7 = seventy thousand
3 = thirty thousand	8 = eighty thousand
4 = forty thousand	9 = ninety thousand.

At the sixth place means
 VI.

0 = nothing	5 = five hundred thousand
1 = one hundred thousand	6 = six hundred thousand
2 = two hundred thousand	7 = seven hundred thousand
3 = three hundred thousand	8 = eight hundred thousand
4 = four hundred thousand	9 = nine hundred thousand.

At the seventh place means
 VII.

0 = nothing	5 = five Millions
1 = one Million	6 = six Millions
2 = two Millions	7 = seven Millions
3 = three Millions	8 = eight Millions
4 = four Millions	9 = nine Millions .

From this it is evident that the meaning of the characters in the seventh place is similar to the meaning in the first place, in the seventh only the word millions being added. In the same way, the meaning of the eighth place is obtained, if the word million is added in the second place; and in this way the ninth place comes from the third, the tenth from the fourth, and so on, except for the thirteenth and the following, which are again formed from the first and the following by the deployment of the word trillions. Finally, the characters at the nineteenth place mean trillions, those on the twenty-fifth quadrillion, and so forth; from which at the same time the designation of the middle places is obtained. Such a form is meant in this number 7 3 0 2 5 6 8 , the character

- 8 at the first place = eight
- 6 at the second place = sixty
- 5 at the third place = five hundred
- 2 at the fourth place = two thousand
- 0 at the fifth place = nothing
- 3 at the sixth place = three hundred thousand

7 at the seventh place = seven Million.

Thus from which the value or meaning of any character is known in a number written in this way.

6. The magnitude of a number, which is expressed by many characters put in place following each other, is found by putting together the meanings of all the characters. Where the custom of going from the left to the right in naming them proceeds along.

As this type of writing of numbers is arbitrary, so too is the order according to which the numbers are spoken, based on habit. But in naming the characters, we go therefore mainly from the left to the right, which in this way meanwhile almost results in the name which any number in our language would lead, arising from this. According to this, the above number would make as much as follows 7302568 : seven million, three hundred thousand and two thousand and five hundred and sixty and eight. But following the proper manner of our speaking, this number would thus be expressed: Seven Million, three hundred and two thousand, five hundred and sixty eight; which differs from the former only in that above, since a thousand occurs twice in succession, here only the latter time is put in place, by being in this way also at the same time belonging to the preceding one. Besides one says sixty-eight instead of sixty and eight. From which it is evident that this way of writing numbers, with the usual way of expressing numbers with words, very accurately match up, in that any number gives us almost the ordinary words, and that in the very order spoken ; which is observed in almost all communities in all languages, but in some more so than in others.

7. In order to describe any one number of this kind, from however many characters it likewise always consists, with the proper associated spoken words, it is only necessary to know how those numbers, which consist of only three characters, are to be expressed ; now this occurs, in that we must call the first character on the left by its natural name and from that the word hundred put in place ; from that we call in German speech the first character going to the right and put there the name of the middle term, which is held in the second place, as set out above.

If the number consists of two characters only, or the first to the left is 0, thus only the two latter are to be expressed; then this character 0, which indicates zero, will at no time be mentioned. In the German language there is only one difficulty, in that from the two characters put in place, the one to the right is expressed first. But if this character is a 0, thus only the first going to the left has the name by which it is called in the second place. Thus there is 10 ten, 20 twenty, 30 thirty, and so forth. 11 is either eleven or one and ten, 12 twelve of two and ten, 13 thirteen, 14 fourteen, and so on as far as twenty. From twenty as far as to a hundred the naming goes according to the given rule, namely 27 is called seven and twenty, 56 is called six and fifty, 89 is called nine and eighty, and so on. Having now grasped the pronunciation for two characters, it is thus very easy to pronounce all numbers which can be written with three characters, in that only in the first

Ch. 1 of Euler's E17:
 ARITHMETIC OR THE GENERAL ART OF RECKONING.
 Translated from German by Ian Bruce; 6/6/2018.
 Free download at 17centurymaths.com.

place the first of the left together with the words for the hundreds to be named added, and the two following as taught above, with the words to be added. Thus 114 is a hundred and fourteen, 570 five hindered and seventy, 324 three hundred and twenty four, 208 two hundred and eight, 600 six hundred and so forth.

8. Had one learned to pronounce all the numbers, to be written thus with three or more characters, then it is very easy, to pronounce all the numbers with their original words, from whatever characters they always consist. This being done, in that beginning from the right hand, the characters will be cut off in threes always, so that the whole number will be broken up into a known number of terms, each of which will consist of three characters. Every single term to be expressed just as with words, as if it stands alone, and further beyond that by the first of the rules the word besides to be added towards the left; as thousand by the second of the rules, million by the third, thousand by the fourth, billion by the fifth, and so forth. From this method now a term according to the other pronunciation be made, but beginning from the left and proceeding to the right.

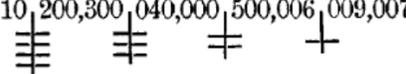
This division into terms, each of which consists of three parts, occurs from the rule towards the left, as long characters are present; therefore to be noted, that the last term not always to consist of three characters, but often containing only two or one ; but nevertheless the same to be expressed, as if they stand alone, with the proper words to be put in place. As now with regard to these words, we see thus that going from right to the left these terms, namely: the second, fourth, sixth, eighth, tenth, and so on, all lead with the word thousand itself. But the third has by itself the word millions, the fifth billions, seventh trillions, ninth quadrillions, and so forth. Each number defined before thus can be set up for pronunciation in the following way :

31	415	926	535	897	932	384
Trillion	thousand	Billion	thousand	Million	thousand	

or also, instead of the word, only the signs as follows:

31	415	926	535	897	932	384
≡		≡		+		

where commas remain instead of thousands, but the signs $+$ \neq \equiv indicate millions billions, trillions. According to the rules given, this number is expressed in this way: Thirty-one trillion, four hundred and fifteen thousand, nine hundred and twenty-six billion, five hundred and thirty-five thousand, eight hundred and ninety-seven millions, nine hundred and thirty-two thousand, three hundred and eighty-four. It has already been recalled above that the character 0 is not expressed. So that this does not cause the beginners any difficulty, we have added the following example :

10,200,300,040,000,500,006,009,007


This number will now be expressed thus: ten quadrillion, two hundred thousand and three hundred trillion, forty thousand billion, five hundred and six million, nine thousand and seven. In this way, now each this kind is recognized and expressed in words, with every number described by these characters. Now, follow how each number, which is expressed in words, should be written by these characters in the manner indicated. It is necessary to explain this better before making clear with a few words.

9. In any number described in the above-mentioned way, the units stand in the first place from right to left, because a character standing in this position indicates how many individual parts are present. In the second place are the decades, in which the character at this point indicates how tens individual parts are present. Further, those in the third place are called hundreds, the fourth thousands, the fifth tens of thousands, the sixth hundreds of thousands, and the seventh millions. If we now consider the millions as separate pieces, there are again tens in the eighth place, namely of millions, in the ninth hundreds, and so on again up to trillions in the thirteenth place. In the same order you go on again to trillions and so on.

[In the following table, Euler uses the original Latin words for decades, centuries, millennia for tens, hundreds, and thousands.]

To make this clearer, the following table serves to indicate what the characters mean in any place : as

Place	Meaning
-------	---------

Ch. 1 of Euler's E17:
 ARITHMETIC OR THE GENERAL ART OF RECKONING.
 Translated from German by Ian Bruce; 6/6/2018.
 Free download at 17centurymaths.com.

1Units	} of units
2Tens	
3Hundreds	
4Thousands	
5Tens of thousands	
6Hundreds of thousands	
7Units	} Millions
8Tens	
9Hundreds	
10Thousands	
11Tens of thousands	
12Hundreds of thousands	

Place	Meaning
-------	---------

13Units	} of billions
14Tens	
15Hundreds	
16Thousands	
17Tens of thousands	
18Hundreds of thousands	
19Units	} of trillions
20Tens	
21Hundreds	
22Thousands	
23Tens of thousands	
24Hundreds of thousands	
	and so on.	

It should now be noted, that a decade contains ten units or single parts, but a century contains ten decades, a millennium ten centuries, a decade of millennia ten millennia, and so on.

If we thus have made sense of these words, we see easily, how many parts each number of any kind contains ; thus this number 5 738 264 contains : 5 million, 7 hundred thousands and 3 tens of thousands and 8 thousand hundred and 6 tens and 4 single parts or units. But to give a clear understanding of this, thus let us provide an example, a man has so many rubles in his fortune, as this number 5 738 264 provides. The size of this fortune is now most clearly understood when we says that this man first has 5 chests, in each of which there is a million rubles, and then still 7 chests, each of a hundred thousand rubles; 33 chests, each of ten thousand rubles ; 48 sacks, each of a thousand rubles; 52 sacks, each of a hundred rubles ; 66 bags, ten rubles in each; and finally still in addition, 4 separate rubles. From such a description each one of these riches now will have a clear meaning; and when we think about it clearly, thus we find, that even such a large number itself can be presented in this way. Then what we call there units, are in this case single rubles. Then here ten is a bag of ten rubles. A hundred is here a sack of one hundred rubles, and so forth.

10. In order to write down a number which has been given, first one must see how many the same contains of any of the same kind from the previous table. Afterwards, when this happens, exactly the number of each variety the table indicated are to be put in place. *But where, after all these have been put in place, still a few passages remain empty, they are to be filled with the character indicating 0. Which is why it helps to note the points with dots, if you know how many of the same must be present beforehand.*

Thus if according to this method two hundred and six thousand, seven hundred and fifty were to be written ; so we have to see, that 2 hundred be present, which belongs to the sixth place; after that for the fifth place there is 6 thousand there for the fourth place, and then 7 hundred for the third place, and finally 5 tens for the second place ; so that the fifth and the first place remain single. This number will thus become in our characters 206750. However, anyone who has expressed numbers, as previously taught, will to some extent be experienced to write a number which he hears, and if he did not, he would soon notice the mistake, when he should again express his written number in words. However, we can still give some rules so that this work can be dealt with much more safely. If the number is expressed thus, as is the custom with these, so that at first the largest kinds and then the order according to lesser ones are to be named, thus the characters of any kind equally can be written from left to right, when it is observed, that something is present from all the following kinds going to the highest. But we meet these, so that one or several kinds cannot be named, thus we can also equally note the same, and their places completed with 0. The most pertinent thing here is to know well enough how to write the numbers which are smaller than a thousand, to put them in their three places, both for the thousands and millions, etc., by which such numbers tend to be named . Finally also it is to be observed that millions, billions, trillions etc. have six places allocated to them; because then any kind in particular can be written: only to note that after the millions going to the right still 6 digits must follow, after the trillions twelve digits, and so on. Finally also it is to be observed, that never can more than nine places be written for one kind, since 10 parts of one kind make one piece of the next kind, and consequently belonging to that kind. Therefore it must not be allowed to precede further, if we have to write eleven thousand, eleven hundred and eleven; namely as it must be known, that eleven hundred makes a thousand as well as a hundred and therefore it has twelve thousand on hundred and eleven, which to be written thus 12111.

11. What is clear so far, namely how we can write a number from the spoken word by means of characters, and then again any number may be written by means of such characters, which will be called the numeration, and which gives rise mainly to the first arithmetical operation to be considered.

It is arbitrary, what kind of characters to be used to write the numbers ; but any way of expressing the numbers, necessitates particular rules of arithmetical operations, which must be deduced from the nature of each method. But we have hitherto explained sufficiently that the ordinary way, by means of the ten characters, are all convenient for the words by which the numbers are called ; as then by this way it is very easy, each one in turn by such characters to express the number in words, and finally to write a known number with words. Since the arithmetical operations thus were established most conveniently, before one could proceed to the operations themselves, it was unavoidably necessary to explain in detail this form of expressing the numbers, so that the rules for the operations could be deduced from that. This preparation for the arithmetical operations is now called enumeration or notation, which demonstrated how to write any number, and when a number is written, to pronounce it. The enumeration cannot, therefore, be counted

among the operations if, by an operation, we understand a particular way of producing a new number from two or more given numbers. Since we now lay the foundation for the arithmetic operations by the establishment of the numeration, and from these we can explain them thoroughly, we proceed to these operations ourselves, if a few examples for practice were to be provided.

Examples of Enumeration

I. It has been found that the perimeter of the earth holds so many German miles when this number indicates 5400: Now one asks how great is the number of miles ?
Answer: five thousand four hundred German miles.

[Each state had its own definition of a mile before the metric system was introduced, these were mainly around 7.5 km for a German mile, or around 5 English miles.]

II. Theodor Bibliander has calculated the expense which King Solomon had expended building the temple in Jerusalem, and put it at 13695380050 crowns; now the size of this number is required

Ans.: thirteen thousand six hundred and ninety five million, three hundred and eighty thousand, and fifty Crowns.

III. The Roman emperor Augustus used to protect the boundaries of the Roman state yearly with 12000000 Crowns, How is this number said in words ?

Ans.: One million and two times a hundred thousand Crowns.

IV. The treasure, with which the king Sardanapalus of Assyria himself is said to have burned, is estimated at 145,000,000 gold guilders; ask yourself, how great was this treasure?

Answer: one hundred and forty five thousand gold guilder.

V. ARCHIMEDES demonstrates that not only all grains of sand on the whole earth can be counted; but that one could even indicate a number which would be greater than the number of grains of sand which would require the entire space of the world to be filled to the utmost fixed stars. This number is set by Clavius according to our manner of writing as follows:

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000, namely Unity with fifty-one ciphers. How should this number be expressed in words?

Answer: one thousand octillion. Namely the latter forty-eight ciphers give an octillion, and before that there are another thousand, that is a thousand.

VI. Finally, can the following number 12,345,678,900,987,654,321 serve as an example, in which all the different variations occur. How is this number now expressed in words?

Answer: twelve trillion, three hundred and forty-five thousand six hundred and seventy-eight billion, nine hundred thousand nine hundred and eighty-seven million, six hundred and fifty-four thousand three hundred and twenty-one.

CAPITEL 1

VON DER ARITHMETIK ODER RECHENKUNST ÜBERHAUPT

1. Die Arithmetik oder Rechenkunst ist eine Wissenschaft, welche uns die Natur und die Eigenschaften der Zahlen lehret, und zugleich einige Regeln an die Hand gibt, vermittelst welcher man die meisten in dem gemeinen Leben vorkommenden Aufgaben ausrechnen oder auflösen kann.

Die Arithmetik oder Rechenkunst, welche allhier soll abgehandelt werden, ist ein Theil der Mathematik; weswegen zu grösserer Erläuterung dienen wird, mit wenigem zu berühren, worinn diese Wissenschaft besteht. Die Mathematik ist demnach eine Wissenschaft, welche lehret, wie man aus bekannten Grössen andere, so noch nicht bekannt sind, finden soll. Dasjenige nun, davon in der Mathematik gehandelt wird, ist alles dasjenige, davon die Grösse entweder bekannt ist oder gesucht wird. Wenn man auch alle Theile der Mathematik betrachtet, so wird man befinden, dass die Sache immer dahin gehe, wie eine unbekante Grösse aus anderen schon bekannten Grössen soll gefunden werden. Die verschiedenen Theile der Mathematik aber entstehen von den verschiedenen Gattungen der Grössen, indem ein jeder nur eine besondere Art derselben betrachtet. Eine besondere Art der Grössen sind nun die Zahlen, und die Arithmetik [ist] derjenige Theil der Mathematik, welcher mit den Zahlen umgeht. Man kann demnach auch sagen, dass die Arithmetik eine Wissenschaft sei, welche lehret, wie man aus bekannten oder gegebenen Zahlen eine noch unbekante Zahl finden soll; wie wir dann sehen, dass in allen arithmetischen Operationen allezeit eine Zahl gefunden wird, die vorher unbekannt gewesen. Wie aber die Arithmetik insgemein pflegt traktirt zu werden, so begreift dieselbe noch mehr Operationen und Regeln in sich, als bloss aus der Natur und Beschaffenheit der Zahlen können hergeleitet werden. Man pflegt nämlich mit der eigentlichen Arithmetik noch einige Regeln, welche in der allgemeinen Analysis oder Algebra ihren Grund haben, zu vereinigen, damit ein Mensch, welcher dieselbe erlernt, auch im Stande sei, die meisten Aufgaben, so in dem gemeinen Leben vorzufallen pflegen, aufzulösen, ohne in der Algebra geübet zu sein. Ob demnach gleich diese Regeln zu der Wissenschaft der Zahlen nicht gehören, so ist um angeführter Ursache willen dennoch nöthig, dieselben damit vereinigt zu behalten. Und deswegen haben wir im Anfang vorausgesetzt, dass die Arithmetik ausser der Betrachtung der Zahlen einige Regeln an die Hand gebe, wodurch die meisten in dem gewöhnlichen Handel und Wandel vorfallenden Rechnungen können bewerkstelliget werden.

2. Die Arithmetik wird also am füglichsten in zwei Theile getheilet, davon der erste alles dasjenige in sich begreift, was bloss allein in der Natur der Zahlen gegründet ist. Der andere Theil aber enthält diejenigen Regeln, welche bei den meisten Fällen, so in dem gemeinen Leben vorkommen, mit Nutzen angebracht werden können.

Der erste Theil ist, wie schon gemeldet, die Arithmetik an und für sich selbst, als dessen Grund allein aus der Natur und Eigenschaften der Zahlen fliesset. Und dahin gehören die so genannten Species theils mit ganzen, theils mit gebrochenen Zahlen, indem dieselben ganz und gar auf der Natur der Zahlen beruhen. Ob aber gleich diese Species oder Operationen in allen Rechnungen Platz finden, und auch die schwersten Rechnungen durch diese Operationen ganz allein ausgeföhret werden; so sind dieselben dennoch nur als der Werkzeug anzusehen, dadurch dergleichen Rechnungen bewerkstelliget werden. Hingegen ist in solchen Fällen das fürnehmste, dass man wisse, welcher Operationen man sich bei einer jeglichen Gelegenheit bedienen müsse, damit das Verlangte gefunden werde. Es ist nämlich nicht genug, die gedachten arithmetischen Operationen zu verstehen, sondern man muss für einen jeglichen Fall eine Regel wissen, welche lehret, was für Operationen gebraucht werden müssen, um dasjenige, was zu wissen verlangt wird, zu finden. Diese Regeln haben nun ihren Grund nicht in der Arithmetik; sondern sind aus der allgemeinen Analysis oder Algebra gelehret; als wo für eine jede Art von Aufgaben aus den Umständen sonderbare Regeln hergeleitet werden, durch welcher Hülfe man zu richtiger Auflösung gelangen kann. Es werden demnach aus der Algebra so viel und solche Regeln in die Rechenkunst angenommen, als zu den gewöhnlichen Vorfällen auszurechnen nöthig sind. Solchergestalt sind in die Arithmetik aufgenommen worden die Regula Detri, Regula Quinque, Regula Alligationis, Regula Falsi etc., als ohne welche ein Rechenmeister, welcher in der Algebra nicht geübet ist, schwerlich fortkommen kann.

3. Wenn viel Stücke von einer Art vorhanden sind, so wird diese Vielheit durch eine Zahl angedeutet. Und deswegen versteht man durch eine Zahl, von wieviel Stücken die Rede ist. Da in dem ersten Theile der Rechenkunst die Natur der Zahlen soll untersucht, und daraus diejenigen Operationen hergeleitet werden, welche zu Vollziehung der im zweiten Theile vorkommenden Regeln nöthig sind; so muss man sich vor allen Dingen einen deutlichen Begriff von den Zahlen zu wege bringen. Dieses geschieht nun am füglichsten durch Betrachtung desjenigen, welches eins genennet wird; indem eine Zahl andeutet, wieviel Stücke von derselben Sorte vorhanden seien. Als wenn man zum Exempel von hundert Rubeln sprechen höret, so versteht man, dass von demjenigen Ding, welches Rubel genennet wird, hundert Stücke benennet werden; oder die Zahl hundert zeigt an, von wieviel Stücken, deren ein jedes ein Rubel ist, die Rede sei. Was aber die Grösse der Zahlen betrifft, so wird hier vorausgesetzt, dass derjenige, welcher die Arithmetik zu lernen gesinnet ist, von der Grösse einer jeden Zahl einen Begriff habe und die Worte wisse, damit die Zahlen benennet werden. Hiezu ist aber hinlänglich, nur immer die Zahl benennen zu können, welche herauskommt, wenn zu einer gegebenen Zahl noch eins hinzugesetzt wird. Dann auf diese Art wird ein Mensch mit Zählen so weit fortfahren

können, als man verlangt; und wird dabei von der Menge der Stücken, welche eine jede Zahl andeutet, einen deutlichen Begriff erhalten.

4. Alle Zahlen, wie gross sie auch sind, pflegen auf eine sehr kurze und bequeme Art durch nachfolgende zehn Characteres oder Zeichen ausgedrückt zu werden: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Davon die Bedeutung eines jeden, wenn derselbe für sich allein betrachtet wird, genugsam bekannt ist, und also keiner weiteren Erklärung bedarf.

Zu den arithmetischen Operationen ist nicht genug, eine jede Zahl mit ihrem gehörigen Namen entweder zu nennen oder zu schreiben; sondern es wird zu Erleichterung derselben Operationen erfordert, dass die Zahlen durch besondere und bequeme Zeichen oder Characteres angedeutet werden. Dieses kann nun auf vielerlei Arten geschehen, davon die leichteste und einfältigste ist, wenn so viel Punkten oder Striche hintereinander gesetzt werden, als die Zahl bedeutet: als wenn zum Exempel acht auf diese Art geschrieben wird 11111111. Diese Art aber ist, wenn die Zahlen sehr gross sind, einer grossen Weitläufigkeit und Tindeutlichkeit unterworfen; indem erstlich lange Zeit und ein grosser Raum eine grosse Zahl zu schreiben erfordert, und hernach auch, wenn eine solche Zahl geschrieben, sehr schwer fallen würde, die Zahl zu erkennen. Nach der römischen Schreibart wird zwar diese Weitläufigkeit und Tindeutlichkeit etwas verringert, indem anstatt fünf Strichen dieses Zeichen V, anstatt zehn dieses Zeichen X, und so fort, geschrieben wird; allein da diese Art gleichwohl für grosse Zahlen noch ziemlich weitläufig und undeutlich, dabei auch nicht durch feste Regeln genugsam eingeschränket ist, so ist dieselbe nicht bequem, die arithmetischen Operationen darnach einzurichten. Noch mehr Schwierigkeiten sind diejenigen Arten, die Zahlen zu schreiben, unterworfen, in welchen die Buchstaben des Alphabets zu Bedeutung der Zahlen gebraucht werden; gleichwie vormals bei den meisten Völkern geschehen. Vor diesen Arten hat nun die anjetzo fast allenthalben gebräuchliche Art, die Zahlen durch Hülfe der zehn angeführten Zeichen zu schreiben, einen sehr grossen Vorzug, wie mit mehrerem aus folgendem zu ersehen.

5. Bei dieser Schreibart der Zahlen behalten die obigen zehn Zeichen nicht allzeit einerlei Bedeutung: sondern um den wahren Werth eines jeden Characters zu finden, muss man auf die Stelle desselben Acht geben. Als auf der ersten Stelle von der Rechten gegen der Linken behält der Character seine natürliche Bedeutung, als wenn er vor sich allein gesetzt wäre. Auf der zweiten Stelle bedeutet ein Character zehnmal mehr als wenn er allein stünde. Auf der dritten Stelle bedeutet ein Character hundertmal mehr, auf der vierten tausendmal mehr, und so fort, immer zehnmal mehr auf der folgenden Stelle, als auf der vorhergehenden.

Hiebei ist nun zu merken, dass das Zeichen 0 auf allen Stellen nichts bedeutet, weil es zehnmal nichts und hundertmal nichts und so fort allzeit nichts ausmacht. Wie aber die Vermehrung der Bedeutung der übrigen Zeichen nach den Stellen beschaffen sei, so ist zu merken, dass der Werth eines jeglichen Characters zehnmal grösser sei, als auf der vorhergehenden Stelle nach der rechten Hand. Und deswegen hat man sich nachfolgende Tabelle nöthig wohl bekannt zu machen:

Zehnmal eins macht zehn

Zehnmal zehn macht hundert
 Zehnmal hundert macht tausend
 Zehnmal tausend macht zehntausend
 Zehnmal zehntausend macht hunderttausend
 Zehnmal hunderttausend macht tausendmal tausend oder eine Million
 Tausendmal tausend Millionen macht eine Billion
 Tausendmal tausend Billionen macht eine Trillion
 und so weiter.

Aus dieser Tabelle bekommt man also einen Begriff von den Zahlen zehn, hundert, tausend und so fort; indem man daraus sieht, wieviel Stucke eine jede Zahl vorstellt. Hieraus kann man aber ferner abnehmen, wieviel ein jeder Character von den obgedachten zehn in einer jeden Stelle bedeute. Nämlich in der ersten Stelle von der rechten gegen der linken Hand bedeutet wie folget:

I.

0 = nichts	5 = fünf
1 = eins	6 = sechs
2 = zwei	7 = sieben
3 = drei	8 = acht
4 = vier	9 = neun .

Auf der zweiten Stelle aber bedeutet

II.

0 = nichts	5 = fünfzig
1 = zehn	6 = sechzig
2 = zwanzig	7 = siebenzig
3 = dreissig	8 = achtzig
4 = vierzig	9 = neunzig.

III.

0 = nichts	5 = fünfhundert
1 = hundert	6 = sechshundert
2 = zweihundert	7 = siebenhundert
3 = dreihundert	8 = achthundert
4 = vierhundert	9 = neunhundert.

Auf der vierten Stelle bedeutet

IV.

0 = nichts	5 = fünftausend
1 = tausend	6 = sechstausend

Ch. 1 of Euler's E17:
ARITHMETIC OR THE GENERAL ART OF RECKONING.
Translated from German by Ian Bruce; 6/6/2018.
Free download at 17centurymaths.com.

17

2 = zweitausend	7 = siebentausend
3 = dreitausend	8 = achttausend
4 = viertausend	9 = neuntausend.

Auf der fünften Stelle bedeutet
V.

0 = nichts	5 = fünfzigtausend
1 = zehntausend	6 = sechzigtausend
2 = zwanzigtausend	7 = siebenzigtausend
3 = dreissigtausend	8 = achtzigtausend
4 = vierzigtausend	9 = neunzigtausend.

Auf der sechsten Stelle bedeutet
VI.

0 = nichts	5 = fünfhunderttausend
1 = hunderttausend	6 = sechshunderttausend
2 = zweihunderttausend	7 = siebenhunderttausend
3 = dreihunderttausend	8 = achthunderttausend
4 = vierhunderttausend	9 = neunhunderttausend.

Auf der sieben Stelle bedeutet
VII.

0 = nichts	5 = fünf Millionen
1 = eine Million	6 = sechs Millionen
2 = zwei Millionen	7 = sieben Millionen
3 = drei Millionen	8 = acht Millionen
4 = vier Millionen	9 = neun Millionen.

Hieraus erhellt, dass die Bedeutung der Characteren auf der siebenten Stelle ähnlich sei der Bedeutung auf der ersten Stelle, indem bei der siebenten nur das Wort Millionen zugesetzt wird. Gleichergestalt wird man die Bedeutung auf der achten Stelle haben, wenn man bei der zweiten Stelle das Wort Millionen hinzusetzt; und auf eben diese Art entspringt die neunte Stelle aus der dritten, die zehnte aus der vierten, und so weiter bis auf die dreizehnte und folgenden, welche wieder aus der ersten und folgenden durch Beisetzung des Wortes Billionen formirt werden. Endlich bedeuten die Characteres auf der neunzehnten Stelle Trillionen, die auf der fünfundzwanzigsten Quadrillionen und so

fort; woraus zugleich die Benennung der mittleren Stellen erhellet. Solchergestalt bedeutet in dieser Zahl 7 3 0 2 5 6 8 der Character

8 auf der ersten Stelle = acht
6 auf der zweiten Stelle = sechzig
5 auf der dritten Stelle = fünfhundert
2 auf der vierten Stelle = zweitausend
0 auf der fünften Stelle = nichts
3 auf der sechsten Stelle = dreihunderttausend
7 auf der siebenten Stelle = sieben Millionen.

Woraus also der Werth oder die Bedeutung eines jeglichen Characters in einer auf dieser Art geschriebenen Zahl erkannt wird.

6. Die Grösse einer Zahl, welche durch viel hintereinander gesetzte Characteres ausgedrückt wird, findet man, wenn man die Bedeutungen aller Characteres zusammensetzt. Wobei die Gewohnheit mit sich bringt, in Benennung derselben von der Linken zu der Rechten fortzugehen.

Gleichwie diese Schreibart der Zahlen willkürlich ist, also beruhet auch die Ordnung, nach welcher die Zahlen ausgesprochen werden, auf der Gewohnheit. Wir gehen aber in Benennung der Characteres deswegen hauptsächlich von der Linken zu der Rechten, dieweilen auf diese Art fast eben der Name, welchen eine jegliche Zahl in unserer Sprache führet, herauskommt. Diesemnach würde die obige Zahl 7302568 soviel ausmachen wie folgt: Sieben Millionen, dreihunderttausend und zweitausend und fünfhundert und sechzig und acht. Nach der Eigenschaft unserer Sprache aber wird diese Zahl also ausgesprochen: Sieben Millionen, dreihundertundzwei tausend, fünfhundertundachtundsechzig; welche Art von der vorigen nur darinn unterschieden ist, dass, da oben tausend zweimal nacheinander vorkommt, hier nur das letztere Mal gesetzt wird, indem es auf diese Art gesetzt auch zugleich zu dem vorhergehenden gehöret. Überdas sagt man anstatt sechzig und acht, achtundsechzig. Aus welchem allen erhellet, dass diese Art, die Zahlen zu schreiben, mit der gewöhnlichen Art, die Zahlen mit Worten auszusprechen, sehr genau übereinkomme, indem uns eine jegliche Zahl beinahe die gewöhnlichen Worte, und das in eben der Ordnung in den Mund legt; welche Gemeinschaft fast in allen Sprachen, in einer aber mehr als in der anderen, beobachtet wird.

7. Um eine jegliche auf diese Art beschriebene Zahl, aus wieviel Characteren dieselbe auch immer besteht, mit den gehörigen Worten auszusprechen, hat man nur nöthig zu wissen, wie diejenigen Zahlen, welche nur aus dreien Characteren bestehen, ausgesprochen werden; dieses geschieht nun, indem man den ersten Character gegen die linke Hand mit seinem natürlichen Namen nennet und dazu das Wort hundert setzet; hierauf nennet man in der deutschen Sprache den ersten Character gegen der Rechten und setzet dazu den Namen des mittleren, welchen er in der zweiten Stelle, wie oben gesetzt, erhält.

Wenn die Zahl nur aus zweien Characteren bestehet, oder der erste gegen der linken Hand 0 ist, so werden nur die zwei letzteren ausgesprochen; dann dieser Character 0, welcher nichts bedeutet, wird niemals ausgesprochen. In der deutschen Sprache ist nur einige Schwierigkeit, eine Zahl, so aus zweien Characteren bestehet, auszusprechen, indem die letztere gegen der rechten Hand zuerst genennet wird. Ist aber dieser Character eine 0, so wird nur der erste gegen der linken Hand mit dem Namen, welchen er in der zweiten Stelle hat, benennet. Also ist 10 zehn, 20 zwanzig, 30 dreissig, und so fort. Weiter ist 11 eilf oder eins und zehn, 12 zwölf oder zwei und zehn, 13 dreizehn, 14 vierzehn, und so fort bis auf zwanzig. Von zwanzig aber bis auf hundert geht die Benennung nach der gegebenen Regel, nämlich 27 heisst sieben und zwanzig, 56 heisst sechs und fünfzig, 89 heisst neun und achtzig, und so fort. Hat man nun die Aussprechung zweier Character begriffen, so ist sehr leicht, alle Zahlen, welche mit drei Characteren geschrieben werden, auszusprechen, indem nur erstlich der erste von der Linken nebst Zusetzung des Worts hundert genennet, und die zwei folgenden wie gelehret, mit den Worten hinzugesetzt werden. Also ist 114 hundert und vierzehn, 570 fünfhundert und siebenzig, 324 dreihundert und vierundzwanzig, 208 zweihundert und acht, 600 sechshundert, und so fort.

8. Hat man nun gelernet alle Zahlen, so mit dreien oder weniger Characteren geschrieben werden, aussprechen, so ist sehr leicht, alle Zahlen, aus wieviel Characteren sie auch immer bestehen, mit ihren gehörigen Worten auszusprechen. Dieses geschiehet, indem von der rechten Hand anzufangen je drei und drei Characteres abgeschnitten werden, so dass die ganze Zahl in eine gewisse Anzahl Glieder zertheilet wird, deren jedes aus drei Characteren besteht. Ein jedes Glied wird nun mit eben den Worten, als wenn es allein stünde, ausgesprochen, und dazu ausser bei dem ersten von der Rechten gegen der Linken ein besonderes Wort hinzugesetzt; als bei dem zweiten von der Rechten tausend, bei dem dritten Millionen, bei dem vierten tausend, bei dem fünften Billionen und so fort. Auf diese Art wird nun ein Glied nach dem anderen ausgesprochen, der Anfang aber von der Linken gemacht und gegen der Rechten fortgefahren.

Diese Eintheilung in Glieder, deren jedes drei Characteres enthält, geschiehet von der Rechten gegen der Linken, so lang Characteres vorhanden; weswegen zu merken, dass das letzte Glied nicht allezeit aus drei Characteren bestehe, sondern vielmal nur zwei oder einen enthalte; da aber gleichwohl dieselben, als wenn sie allein stünden, ausgesprochen werden mit Hinzusetzung des gehörigen Worts. Was nun diese Wörter betrifft, so sieht man, dass von der rechten gegen der linken Hand diese Glieder, nämlich: das zweite, vierte, sechste, achte, zehnte und so fort, alle das Wort tausend mit sich führen. Das dritte aber hat bei sich das wort Millionen, das fünfte Billionen, das siebente Trillionen, das neunte Quadrillionen, und so fort. Eine jede vorgegebene Zahl kann also auf folgende Art zur Aussprechung zugerüstet werden:

31	415	926	535	897	932	384
Trillionen	tausend	Billionen	tausend	Millionen	tausend	

oder auch anstatt der Worte nur Zeichen wie folget:

31	,415	,926	,535	,897	,932	,384
≡		≠		+		

allwo die Commata anstatt tausend stehen, die Zeichen $+$ \neq \equiv aber Millionen, Billionen, Trillionen bedeuten. Nach den gegebenen Regeln wird nun diese Zahl auf diese Art ausgesprochen: Einunddreissig Trillionen, vierhundertundfünfzehntausend neuhundertundsechszwanzig Billionen, fünfhundertundfünfunddreissigtausend achthundertundsiebenundneunzig Millionen, neuhundertundzweiunddreissigtausend dreihundertund vierundachtzig. Es ist schon oben erinnert worden, dass der Character 0 nicht ausgesprochen werde. Damit nun dieses den Anfängern keine Schwierigkeit verursache, haben wir nachgehendes Exempel beigefüget:

10	,200	,300	,040	,000	,500	,006	,009	,007
≡		≠		+				

Diese Zahl wird nun also ausgesprochen: Zehn Quadrillionen, zweihunderttausend und dreihundert Trillionen, vierzigtausend Billionen, fünfhunderttausend und sechs Millionen, neuntausend und sieben. Auf diese Art wird nun eine jede Zahl, welche mit diesen Characteren beschrieben ist, erkannt und mit Worten ausgesprochen. Nun folget, wie eine jede Zahl, welche mit Worten ausgesprochen wird, durch diese Characteres auf gemeldete Art geschrieben werden soll. Dieses aber desto besser vorzutragen, ist nöthig, vorher einige Wörter zu erklären.

9. *In einer nach obgemeldter Art beschriebenen Zahl stehen auf der ersten Stelle von der Rechten gegen der Linken die Unitäten, weiln der auf dieser Stelle stehende Character anzeigt, wieviel einzele Stücke vorhanden sind. Auf der zweiten Stelle sind die Decades, indem der Character auf dieser Stelle ausweiset, wievielmahl zehn einzele Stücke vorhanden. Ferner werden die auf der dritten Stelle Centenarii genennet, auf der vierten Millenarii, auf der fünften Decades millenariorum, auf der sechsten Centenarii millenariorum und auf der siebenten Millionen. Wenn man nun die Millionen als einzele Stücke betrachtet, so befinden sich auf der achten Stelle wieder Decades, nämlich Millionum, auf der neunten Centenarii und so wiederum fort bis auf Billionen auf der dreizehnten Stelle. In gleicher Ordnung geht man wiederum fort bis auf Trillionen und so weiter. Dieses deutlicher vor Augen zu legen*

Ch. 1 of Euler's E17:
 ARITHMETIC OR THE GENERAL ART OF RECKONING.
 Translated from German by Ian Bruce; 6/6/2018.
 Free download at 17centurymaths.com.

dienet folgende Tabelle, welche weiset, was die Characteres auf einer jeglichen Stelle für eine Bedeutung haben: als

Stellen	die Bedeutung
1Unitates
2Decades
3Centenarii
4Millenarii
5Decades millenanorum
6Centenarii millenanorum
7Unitates
8Decades
9Centenarii
10Millenarii
11Decades millenanorum
12Centenarii millenanorum

Unitatum

Millionum

Stellen	die Bedeutung
---------	---------------

13Unitates	}	Billionum
14Decades		
15Centenarii		
16Millenarii		
17Decades millenariorum		
18Centenarii millenariorum		
19Unitates	}	Trillionum
20Decades		
21Centenarii		
22Millenarii		
23Decades millenariorum		
24Centenarii millenariorum		
und so weiter.			

Hiebei ist nun zu merken, dass eine Decas zehn Unitäten oder einzelne Stücke enthalte, ein Centenarius aber zehn Decades, ein Millenarius zehn Centenarios, eine Decas millenariorum zehn Millenarios und so weiter.

Wenn man sich also einen Begriff von diesen Worten gemacht, so siehet man gleich, wieviel Stücke eine jegliche Zahl von einer jeglichen Sorte enthalte; als diese Zahl 5 738 264 enthält: 5 Millionen, 7 Centenarios millenariorum, 3 Decades millenariorum, 8 Millenarios, 2 Centenarios, 6 Decades und 4 einzelne oder Unitates. Hievon aber einen deutlichen Begriff zu geben, so lasset uns setzen, ein Mann habe in seinem Vermögen so viel Rubel, als diese Zahl 5 738 264 ausweiset. Die Grösse dieses Vermögens wird nun am deutlichsten erkannt, wenn man sagt, dieser Mann habe erstlich 5 Kisten, in deren jeder eine Million Rubel sei; und dann noch 7 Kisten, jede von hunderttausend Rubel; drittens 3 Kisten, jede von zehntausend Rubel; viertens 8 Säcke, jeden von tausend Rubel; fünftens 2 Säcke, jeden von hundert Rubel; sechstens 6 Beutel, in deren jedem zehn Rubel; und endlich noch dazu 4 einzelne Rubel. Aus einer solchen Beschreibung wird nun ein jeder von diesem Reichthum einen deutlichen Begriff bekommen; und wenn wir recht nachdenken, so werden wir befinden, dass sich ein jeder eine grosse Zahl auf eben diese Art vorstellet. Dann was wir dorten Unitäten genennet, sind in diesem Exempel einzelne Rubel. Eine Decas ist hier ein Beutel von zehn Rubel. Ein Centenarius ist hier ein Sack von hundert Rubel und so fort.

10. Um eine Zahl, welche ist vorgegeben worden, zu schreiben, muss man erstlich

sehen, wieviel dieselbe von einer jeglichen Sorte aus der vorigen Tabelle enthalte. Hernach wenn dieses geschehen, muss die Anzahl einer jeglichen Sorte auf die in eben der Tabelle angezeigte Stelle gesetzt werden. Wo aber, nachdem dieses alles geschehen, noch einige Stellen ledig bleiben, müssen dieselben mit dem nichts bedeutenden Character 0 erfüllet werden. Weswegen also hiezu dienlich ist, die Stellen, wenn man weiss wieviel derselben vorhanden sein müssen, mit Punkten zu bemerken.

Wenn also nach dieser Art sollte geschrieben werden zweihundertundsechstausend, siebenhundertundfünfzig; so hat man zu sehen, dass erstlich 2 Centenarii millenariorum vorhanden, welche auf die sechste Stelle gehören; hernach sind 6 Millenarii da auf die vierte Stelle, und dann 7 Centenarii auf die dritte Stelle, und endlich 5 Decades auf die zweite Stelle; so dass also die fünfte und die erste Stelle ledig bleiben. Diese Zahl wird demnach in unseren Characteren also stehen 206 750. Wer sich aber in Aussprechung der Zahlen, wie vorher gelehret worden, einigermaßen geübet, wird zugleich im Stande sein, eine Zahl, welche er gehöret aussprechen, wiederum zu schreiben: und wenn es auch nicht recht gerathen sollte, würde er den Fehler bald merken, wenn er seine geschriebene Zahl · wiederum mit Worten ausdrücken sollte. Hiebei aber kann man dennoch einige Regeln geben, dass man in diesem Werke um so viel sicherer verfare. Wenn die Zahl, wie es die Gewohnheit mit sich bringt, so ausgesprochen wird, dass erstlich die grössten Sorten und denn der Ordnung nach die kleineren benennet werden, so kann er gleich von der Linken gegen der Rechten die Characteres einer jeglichen Sorte schreiben, wenn er merket, dass von allen nach der höchsten folgenden Sorten etwas vorhanden ist. Trifft sich aber, dass eine oder einige Sorten nicht benennet wurden, so kann er dieselben auch gleich merken und die Stellen derselben mit 0 ausfüllen. Das fürnehmste hierinn ist, dass man die Zahlen, welche kleiner sind als tausend, wohl wisse zu schreiben und auf ihre gehörigen drei Stellen zu setzen, denn so wohl die Tausender als Millionen, Billionen etc. durch solche Zahlen gezählet zu werden pflegen. Hernach ist auch zu beobachten, dass die Millionen, Billionen, Trillionen etc. sechs Stellen in ihrem Bezirk haben; denn dann eine jegliche Art insbesondere kann geschrieben werden: wobei nur zu merken, dass nach den Millionen gegen der Rechten noch 6 Stellen, nach den Billionen zwölf Stellen, und so fort, folgen müssen. Endlich ist auch zu merken, dass niemals von einer Sorte mehr als neun können geschrieben werden, indem

10 Stücke von einer Sorte ein Stück von der folgenden ausmachen und folglich

dahin gehören. Deswegen muss sich einer nicht verführen lassen, wenn man ihm zu schreiben vorlegt eilftausend, eilfhundert und eilf; er muss nämlich wissen, dass eilfhundert einen Millenarium nebst einem Centenario ausmache und deswegen wird er haben zwölftausend einhundert und eilf, welche also geschrieben werden 12111.

11. Dasjenige, welches bisher ist erkläret worden, nämlich wie man eine durch Characteres beschriebene Zahl mit Worten aussprechen und hinwiederum eine jede Zahl durch solche Characteres schreiben soll, wird die Numeration genennet und pflegt gemeinlich für die erste arithmetische Operation gehalten zu werden.

Es ist willkürlich, was für Character zu Beschreibung der Zahlen gebraucht werden; eine jede Art aber der Zahlen auszudrücken, erfordert besondere Regeln zu den arithmetischen Operationen, welche aus der Beschaffenheit einer jeglichen Art müssen hergeleitet werden. Wir haben aber bisher genugsam dargethan, dass die gewöhnliche Art vermittelst der zehn Character am allerbesten mit den Worten, dadurch die Zahlen benennet werden, übereinkommen; wie es dann auf diese Art sehr leicht ist, eine jede durch solche Characteres beschriebene Zahl mit Worten auszusprechen, und hinwiederum eine mit Worten benannte Zahl zu schreiben. Da nun die arithmetischen Operationen nach dieser Art am bequemsten eingerichtet worden, so war, ehe man zu den Operationen selbst schreiten könnte, unumgänglich nöthig, diese Ausdrucksart der Zahlen ausführlich zu erklären, damit daraus die Regeln für die Operationen könnten hergeleitet werden. Diese Vorbereitung zu den arithmetischen Operationen wird nun Numeratio oder Notatio genennet, welche lehret eine jegliche Zahl schreiben, und wenn eine Zahl geschrieben, wiederum aussprechen. Die Numeration kann also nicht mit unter die Operationen gezählet werden, wenn wir durch eine Operation eine besondere Art verstehen, aus zweien oder mehr gegebenen Zahlen eine neue herauszubringen. Da wir nun durch Ausführung der Numeration das Fundament zu den arithmetischen Operationen geleyet, daraus dieselben gründlich können erklärt werden, so schreiten wir zu diesen Operationen selbst fort, wenn einige Exempel zur Übung werden beigebracht sein.

Exempel der Numeration

I. Man hat gefunden, dass der Umkreis der Erde so viel deutsche Meilen halte als diese Zahl 5400 andeutet: nun fragt man, wie gross die Anzahl der Meilen sei?

Antw.: fünftausendvierhundert deutsche Meilen.

II. BIBLIANDER hat die Unkosten ausgerechnet, welche der König Salomon bei Aufbauung des Tempels zu Jerusalem aufgewandt, und setzt dieselben auf 13695380050 Kronen; nun wird die Grösse dieser Zahl gefragt.

Antw.: dreizehntausend sechshundertfünfundneunzig, Millionen, dreihundertundachtzigtausend und fünfzig Kronen.

III. Der Kaiser Augustus wandte jährlich zur Beschützung der Grenzen des römischen Reichs 1200000 Kronen auf. Wie wird diese Zahl mit Worten ausgesprochen?

Antw.: eine Million und zweimalhunderttausend Kronen, oder auch zwölfmalhunderttausend Kronen.

IV. Der Schatz, mit welchem sich der König Sardanapalus von Assyrien selbst soll verbrannt haben, wird auf 145000000000 Goldgulden geschätzt; fragt sich, wie gross dieser Schatz gewesen?

Antw.: hundertundfünfund vierzigtausend Millionen Goldgulden.

V. ARCHIMEDES beweiset, dass nicht nur alle Sandkörner auf der ganzen Erde können gezählet werden; sondern dass man sogar eine Zahl anzeigen könne, welche grösser wäre, als die Anzahl der Sandkörner, welche den ganzen Raum der Welt bis an die äussersten Fixsternen zu erfüllen erfordert würde. Diese Zahl setzt CLAVIUS nach unserer Schreibart nachfolgend:

1 000 000 000000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000, nämlich die Unität mit einundfünfzig Cyphren wie muss nun diese Zahl mit Worten ausgesprochen werden?

Antw.: eintausend Octillionen. Nämlich die letzteren achtundvierzig Cyphren geben Octillionen, und vor denselben stehet noch 1000, das ist tausend.

VI. Endlich kann nachfolgende Zahl 12345678900987654321 zu einem Exempel dienen, darinnen alle verschiedenen Abwechslungen vorkommen. Wie wird nun diese Zahl mit Worten ausgesprochen?

Antw.: zwölfTrillionen. dreihundertundfünfundvierzigtausend sechshundertundachtundsiebenzig Billionen, neunhunderttausend neunhundertundsiebenundachtzig Millionen sechshundertundvierundfünfzigtausend dreihundertundeinundzwanzig.