ON THE INTEGRATION OF A DIFFERENTIAL EQUATION BY FINITE DIFFERENCES, WHICH CONTAINS THE THEORY OF RECURRING SERIES.

(*Miscellanea Taurinensia,* t. 1, 1759.)

[The analytic solution of a certain differential equation is taken as the basis for the numerical solution of similar finite difference equations; the use of suffices to indicate the position of an ordinate on an axis had not yet been invented, and Lagrange uses the same terminology for finite differences as for differentials, which may be confusing. Some small notes have been inserted initially which may or may not be helpful in this regard.]

1. The differential equation shall be proposed

$$dy + y\mathrm{X}dx = \mathrm{Z}dx\,,$$

where X and Z express some functions of the variable *x;* it is known that to integrate this equation, it suffices to make

$$y = uz\,,$$

giving

$$udz + zdu + uzXdx = Zdx\,,$$

where two terms can be made to vanish by choosing a suitable value of *u* or of *z.* Supposing then, that

$$zdu + uz\mathrm{X}dx = 0\,,$$

and dividing by *z,* we will have

$$du + u\mathrm{X}dx = 0\,,$$

and as a consequence

$$\tfrac{du}{u} = -\mathrm{X}dx \quad \text{and} \quad lu = -\int \mathrm{X}dx,$$

namely,

$$u = e^{-\int Xdx},$$

where *e* is the number of which the hyperbolic logarithm is 1. By this supposition, the proposed equation will become

$$udz = Zdx,$$

giving

$$dz = \tfrac{Zdx}{u},\quad z = \int \tfrac{Zdx}{u} = \int e^{\int Xdx} Zdx,$$

and finally

$$y = uz = \frac{\int e^{\int Xdx} Zdx}{e^{\int Xdx}}.$$

2. By observing the procedure of this method, it can be seen easily that it may be applied again successfully to differential equations which are of the same form as the preceding, although they may be considered to be formed from finite differences. Thus let the equation be

$$dy + \mathrm{M}y = \mathrm{N},$$

the differential dy of which shall be finite [*i.e.* $\Delta y_i + M_i y_i = N_i$ at some point x_i, y_i], and the other quantities M and N are some other functions of the variable x. Assuming in the first place

$$y = uz,$$

and in this case there will be

$$dy = udz + zdu + dudz,$$

[*i.e.* $\Delta y = u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z$, where the suffix i is assumed]

and the equation will be changed into

$$udz + zdu + dudz + \mathrm{M}uz = \mathrm{N}.$$

$$[i.e.\ u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z + \mathrm{M}uz = \mathrm{N}.]$$

As above, putting the two terms

$$zdu + \mathrm{M}uz = 0,\ [i.e.\ z\Delta u + \mathrm{M}uz = 0.]$$

and we have

$$du + \mathrm{M}u = 0,\ [i.e.\ \Delta u + \mathrm{M}u = 0.]$$

namely,

$$\tfrac{du}{u} = -\mathrm{M};\ [i.e.\ \tfrac{\Delta u}{u} = -\mathrm{M};]$$

thus resolving this equation in our case where the differential du is not indefinitely small, we assume $u = e^t$, and there becomes

$$u + du = e^{t+dt} \text{ and } du = e^t\left(e^{dt} - 1\right);$$

$$[i.e.\ u + \Delta u = e^{t+\Delta t} \text{ and } \Delta u = e^t\left(e^{\Delta t} - 1\right)]$$

from which

$$\tfrac{du}{u} = e^{dt} - 1 = -\mathrm{M} \text{ and } e^{dt} = 1 - \mathrm{M},$$

$$[i.e.\ \tfrac{\Delta u}{u} = e^{\Delta t} - 1 = -\mathrm{M} \text{ and } e^{\Delta t} = 1 - \mathrm{M},]$$

and taking logarithms,

$$dt\,[i.e.\ \Delta t] = l(1-\mathrm{M});$$

and then on integrating,

$$t = \int l(1-\mathrm{M});\ [i.e.\ t = \sum_i \Delta t_i = \sum_i l(1-M_i);]$$

but we know that the sum of the logarithms of several numbers is equal to the logarithm of the product of all the same numbers; hence, if we express generally the continued product of all the continued quantities in the formula $1-\mathrm{M}$ by $\varpi(1-\mathrm{M})$, we will have

$$t = l\varpi(1-\mathrm{M}), [i.e.\ t = \sum_i \Delta t_i = l\prod_i (1-M_i);]$$

and as a consequence,

$$u = e^t = \varpi(1-\mathrm{M}). [i.e.\ u = e^t = \prod_i (1-M_i);]$$

By the vanishing of these two terms the integration becomes

$$udz + dudz = \mathrm{N}, [i.e.\ u\Delta z + \Delta u\Delta z = \mathrm{N},]$$

from which we find

$$dz = \tfrac{\mathrm{N}}{u+du},\ [i.e.\ \Delta z = \tfrac{\mathrm{N}}{u+\Delta u},]$$

and, on integrating [*i.e.* summing over the finite increments],

$$z = \int \tfrac{\mathrm{N}}{u+du}.\ [i.e.\ z = \sum_i \frac{\mathrm{N}_i}{u_i + \Delta u_i}.]$$

But having found already that $u = \varpi(1-\mathrm{M})$, if one express by M_1, the term consecutive to M, one will have

$$u + du = \varpi(1-\mathrm{M}_1),$$

and as a consequence,

$$z = \int \tfrac{\mathrm{N}}{\varpi(1-\mathrm{M}_1)}.$$

and, since $y = zu$,

$$y = \varpi(1-\mathrm{M})\int \tfrac{\mathrm{N}}{\varpi(1-\mathrm{M}_1)};$$

or rather, on adding to this [numerical] integration some constant term A [to accommodate the missing zero$^{\text{th}}$ term].

$$y = \varpi\left(1-\mathrm{M}\right)\left(\mathrm{A}+\int\frac{\mathrm{N}}{\varpi\left(1-\mathrm{M}_1\right)}\right).$$

[We have stop adding the explanatory notes above.]

3. Now let the [finite difference] equation be proposed

$$y_1 = \mathrm{R}y + \mathrm{T},$$

where y_1 is the term which follows y in the series of y; then $y_1 = y + dy$, [and dy is the finite difference Δy] then the equation shall be reduced to

$$dy + \left(1-\mathrm{R}\right)y = \mathrm{T}.$$

Then one may put thus, as above,

$$1-\mathrm{R} = \mathrm{M},\ \mathrm{T} = \mathrm{N},$$

and one will find the following expression for the value of y

$$y = \varpi\mathrm{R}\left(\mathrm{A}+\int\frac{\mathrm{T}}{\varpi\mathrm{R}_1}\right).$$

If *R* is a constant quantity, it is clear that $\varpi\mathrm{R}$ and $\varpi\mathrm{R}_1$ become the powers of R, the exponents of which are equal to the index of the position of the terms *y* and y_1 in the series of *y;* hence let this number be *m* , so that y_m shall be the same as *y,* and we will have

$$y_m = \mathrm{R}^m\left(\mathrm{A}+\int\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}^{m+1}}\right).$$

If T is constant, $\int\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}^{m+1}}$ is equal to $\mathrm{T}\int\frac{1}{\mathrm{R}^{m+1}}$, where the terms expressed by $\frac{1}{\mathrm{R}^{m+1}}$ form a geometric progression, of which it will be easy to form the sum ; this sum which begins with $\frac{1}{\mathrm{R}}$ shall be equal to S, namely

$$\frac{1}{\mathrm{R}}+\frac{1}{\mathrm{R}^2}+\frac{1}{\mathrm{R}^3}+\ldots+\frac{1}{\mathrm{R}^m} = \mathrm{S},$$

and we will have, on multiplying by *R*,

$$1+\frac{1}{\mathrm{R}}+\frac{1}{\mathrm{R}^2}+\ldots+\frac{1}{\mathrm{R}^{m-1}} = \mathrm{SR} = \mathrm{S}+1-\frac{1}{\mathrm{R}^m};$$

the equation for S can be extract from this :

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{R}^m-1}{\mathrm{R}^m\left(\mathrm{R}-1\right)}$$

as a consequence

$$y_m = \mathrm{R}^m\left[\mathrm{A} + \mathrm{T}\frac{\mathrm{R}^m - 1}{\mathrm{R}^m(\mathrm{R}-1)}\right],$$

or equally,

$$y_m = \mathrm{AR}^m + \mathrm{T}\frac{\mathrm{R}^m - 1}{(\mathrm{R}-1)}$$

4. In order to convince ourselves that this value of y is entirely satisfactory for the conditions of the equation given

$$y_1 = \mathrm{R}y + \mathrm{T} \text{ or equally } y_{m+1} = \mathrm{R}y_m + \mathrm{T},$$

we need only multiply the formula found for y_m by R, and the quantity T to be added to that, and result is found :

$$\mathrm{AR}^{m+1} + \mathrm{T}\frac{\mathrm{R}^{m+1} - \mathrm{R}}{\mathrm{R}-1} + \mathrm{T} \ \left[= \mathrm{AR}^{m+1} + \frac{\mathrm{TR}^{m+1} - T}{\mathrm{R}-1}\right]$$

which itself reduces to

$$\mathrm{AR}^{m+1} + \mathrm{T}\frac{\mathrm{R}^{m+1} - 1}{\mathrm{R}-1},$$

which is the value we have given for the term y_{m+1}.

5. After having found the method of integrating all differential equations by finite differences, included in the general form

$$dy + \mathrm{M}y = \mathrm{N},$$

we can proceed to the integration of other [differential and finite difference] equations which depend on the above method. Now, M. d'Alembert, in the *Memoires de l'Académie Royale de Berlin,* has shown that all differential equations, such as

$$y + \mathrm{A}\frac{dy}{dx} + \mathrm{B}\frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{C}\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots. = \mathrm{X},$$

where A, B, C, ... are some constants, and where X is some function of x, may themselves be reduced to an equation of this form :

$$z + \mathrm{H}\frac{dz}{dx} = \mathrm{V},$$

where H is a constant and V a function of x, which equation is the same as we have taken to integrate in the same case of finite differences. Thus if M. d'Alembert's procedure can also be used when the differences are finite, one will be able in addition to integrate under these circumstances any differential equation of this form:

$$y + \mathrm{A}dy + \mathrm{B}d^2y + \mathrm{C}d^3y + ... = \mathrm{X},$$

and as a consequence the equation [the difference equation]

$$y_1 + \mathrm{P}y_2 + \mathrm{Q}y_3 + ... = \mathrm{X},$$

which we can consider as the general formula of recurring series.
M. d'Alembert's method is found set out in the second volume of M. Bougainville's *Calcul integral* ; but to spare readers the pain, I shall try to set that out here in a few words. Let us suppose

$$\tfrac{dy}{dx} = p,\ \tfrac{dp}{dx} = q,\ \tfrac{dq}{dx} = r, ... ,$$

and the proposed equation will be changed into

$$y + \mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C}\tfrac{dq}{dx} = \mathrm{X}.$$

Now let each of the equations [*i.e.* $\tfrac{dy}{dx} = p,\ \tfrac{dp}{dx} = q,\ \tfrac{dq}{dx} = r, ... ,$] that have been assumed be multiplied by the indeterminate coefficients *a, b, c, ... ,* and which if all these are added to the above as shown, there will be

$$y + (\mathrm{A} + a)\, p + (\mathrm{B} + b)q - a\tfrac{dy}{dx} - b\tfrac{dp}{dx} + \mathrm{C}\tfrac{dq}{dx} = \mathrm{X}.$$

Let an equation be constructed in such a manner that the [derivative or finite difference of the] first term becomes an exact multiple of the second part, namely so that

$$dy + (\mathrm{A} + a)dp + (\mathrm{B} + b)dq = dy + \tfrac{b}{a}dp - \tfrac{\mathrm{C}}{a}dq,$$

and in comparing these term by term there arises

$$\mathrm{A} + a = \tfrac{b}{a},\quad \mathrm{B} + b = -\tfrac{\mathrm{C}}{a}.$$

and from these two equations one finds

$$b = -\tfrac{\mathrm{C}}{a} - \mathrm{B} = \mathrm{A}a + a^2 \ \text{ and } \ a^3 + \mathrm{A}a^2 + Ba + \mathrm{C} = 0,$$

the roots of which give three values of a which equally satisfy all the required conditions. Now assuming

$$y + (\mathrm{A} + a)p + (\mathrm{B} + b)q = z,$$

the equation found will become

$$z - a\frac{dz}{dx} = \mathrm{X},$$

which, compared with that of no. 1, on integrating will give

$$z = -e^{\frac{x}{a}} \int \frac{\mathrm{X}dx}{ae^{\frac{x}{a}}}.$$

Now, since the quantity a can have three different values, we call these a_1, a_2, a_3 , and expressing by Z_1, the value of z which contains a_1, by Z_2 the one which holds a_2, and by Z_3 that one which contains a_3 ; one will have thus the three equations following :

$$\begin{aligned} y + (\mathrm{A} + a_1)p + (\mathrm{B} + b_1)q &= \mathrm{Z}_1, \\ y + (\mathrm{A} + a_2)p + (\mathrm{B} + b_2)q &= Z_2, \\ y + (\mathrm{A} + a_3)p + (\mathrm{B} + b_3)q &= \mathrm{Z}_3. \end{aligned}$$

The value of y can be found from these three equations, which because of the constants quantities $\mathrm{A}, \mathrm{B}, a_1, a_2, \ldots,$ will be itself reduced to this form

$$y = \mathrm{FZ}_1 + \mathrm{GZ}_2 + \mathrm{HZ}_3,$$

where F, G, H are these constants of which the value depends on the others $\mathrm{A}, \mathrm{B}, a_1, a_2, \ldots.$

6. If we examine the procedure of this method, it appears clearly that if the equation had contained many more terms, for example if it had been

$$y + \mathrm{A}\frac{dy}{dx} + \mathrm{B}\frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{C}\frac{d^3y}{dx^3} + \mathrm{D}\frac{d^4y}{dx^4} + \mathrm{E}\frac{d^5y}{dx^5} = \mathrm{X},$$

one would have found from the same

$$y = \mathrm{FZ}_1 + \mathrm{GZ}_2 + \mathrm{HZ}_3 + \mathrm{IZ}_4 + \mathrm{KZ}_5$$

where the quantities $\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2, \ldots.$ are functions of X and x; such that

$$z = -e^{\frac{x}{a}} \int \frac{\mathrm{X}dx}{ae^{\frac{x}{a}}},$$

on putting $a_1,\ a_2\ ,a_3,\ a_4,\ a_5$ for the roots of this equation

$$a^5+\mathrm{A}a^4+\mathrm{B}a^3+\mathrm{C}a^2+\mathrm{D}a+\mathrm{E}=0;$$

further it will be noticed that the operations which this method requires can be done equally, whether the differences should be finite or infinitely small.

7. Thus having the equation from finite differences [where dy now means Δy etc as above]

$$y+\mathrm{A}dy+\mathrm{B}d^2y+\mathrm{C}d^3y+\mathrm{D}d^4y+\mathrm{E}d^5y=\mathrm{X}.$$

and putting

$$dy=p,\ dp=q,\ dq=r,\ dr=s,$$

one will arrive at an equation in the same manner, such that

$$z-adz=\mathrm{X},$$

$$z=y+(\mathrm{A}+a)p+(\mathrm{B}+b)q+(\mathrm{C}+c)r+(\mathrm{D}+d)s,$$

and the quantity a will depend on this equation

$$a^5+\mathrm{A}a^4+\mathrm{B}a^3+\mathrm{C}a^2+\mathrm{D}a+\mathrm{E}=0,$$

the roots of which have already been assumed to be $a_1,\ a_2\ ,a_3,\ a_4,\ a_5$. When one now compares the equation

$$z-adz=\mathrm{X}$$

with that of no. 2, namely

$$dy+\mathrm{M}y=\mathrm{N},$$

and one will have

$$\mathrm{M}=-\tfrac{1}{a},\ \ \mathrm{N}=-\tfrac{\mathrm{X}}{a};$$

consequently

$$1-\mathrm{M}=\tfrac{1+a}{a},$$

which gives finally [*cf.* $y=\varpi(1-\mathrm{M})\int\frac{\mathrm{N}}{\varpi(1-\mathrm{M}_1)}$;]

$$z=\varpi\left(\tfrac{1+a}{a}\right)\left[\text{const.}+\int\frac{-\frac{X}{a}}{\varpi\left(\frac{1+a}{a}\right)}\right],$$

or equally, since a is constant,

$$z_m = \left(\frac{1+a}{a}\right)^m \left[\text{const.} - \int \frac{\text{X}a^m}{(1+a)^{m+1}}\right],$$

as above, m expresses the magnitude of the term z in the series of z. Further if one makes X constant, one will have, in taking the sum of the geometric progression expressed by

$$\int \frac{a^m}{(1+a)^{m+1}},$$

$$z_m = \left(\frac{1+a}{a}\right)^m \left[\text{const.} - \text{X}\frac{(1+a)^m - a^m}{(1+a)^m}\right].$$

Now, as a must have the values $a_1,\ a_2\ ,a_3,\ a_4,\ a_5$, it is evident that on substituting each of these into the formula found, it will result in as many values of z_m which are all satisfied equally. Thus all these values shall be expressed by $\text{Z}_1,\ \text{Z}_2,\ \text{Z}_3,\ \text{Z}_4,\ \text{Z}_5$, and since

$$z = y + (\text{A} + a)p + (\text{B} + b)q + (\text{C} + c)r + (\text{D} + d)s,$$

one will extricate, by means of the five equations

$$z = \text{Z}_1,\ z = \text{Z}_2,\ z = \text{Z}_3,\ z = \text{Z}_4,\ z = \text{Z}_5,$$

the following expression of y, namely

$$y = \text{FZ}_1 + \text{GZ}_2 + \text{HZ}_3 + \text{IZ}_4 + \text{KZ}_5.$$

8. Finally the equation shall be proposed

$$y_1 + \text{A}y_2 + \text{B}y_3 + \text{C}y_4 + ... = \text{X},$$

where $y_1, y_2, y_3, ...$ express the consecutive terms of the series of y; it is evident at first, since

$$y_2 = y_1 + dy_1,\ y_3 = y_1 + 2dy_1 + d^2y_1,$$

and thus for the others, that this equation can be related back to the form of that which we have just examined; but, since the calculation becomes too long in this manner, it will be useful to resolve that directly by the same principles that we have used until up to this point. Further, in order that this equation will be able to be applied more easily to recurrent series, it will be better to consider the terms $y_1, y_2, y_3, ...$ in a reversed order, namely

$$y_2 + dy_2 = y_1,\ \ y_3 + dy_3 = y_2$$

and thus for the others, so that the indices 1, 2, 3, ... denote the distance of each term from the last *y*. On assuming

$$y_2 = p_1, \text{ and one will have } y_3 = p_2;$$

thus there will be again

$$p_2 = q_1 \quad \text{and} \quad p_3 = q_2;$$

again there shall be

$$q_2 = \mathrm{r}_1 \quad \text{and} \quad q_3 = r_2 = s_1$$

and one will have

$$y_2 = p_1,\ \ y_3 = q_1,\ \ y_4 = r_1,\ \ y_5 = s_1,\ \ y_6 = s_2;$$

substituting these values into the proposed equation, and it will become

$$y_1 + \mathrm{A}p_1 + \mathrm{B}q_1 + \mathrm{C}r_1 + \mathrm{D}s_1 + \mathrm{E}s_2 = \mathrm{X}.$$

Wherein one can now introduce the suppositions in the previous equations, namely

$$p_1 - y_2 = 0,\ \ q_1 - p_2 = 0,\ \ r_1 - q_2 = 0,\ \ s_1 - r_2 = 0,$$

and next to have these multiplied by the indeterminate coefficients *a, b, c, ... ,* so that all these added to that which we have just found. It will result in the following

$$\left.\begin{array}{c} y_1 + (\mathrm{A}+a)p_1 + (\mathrm{B}+b)q_1 + (\mathrm{C}+c)r_1 + (\mathrm{D}+d)s_1 \\ -ay_2 - bp_2 - cq_2 - dr_2 + \mathrm{E}s_2 \end{array}\right\} = \mathrm{X}.$$

Now one may arrange that each coefficient of the first part must multiply in the same manner as its corresponding in the second part, so that one may arrive at the same equations as were found in (6), and the quantity *a* will be determined by the equation

$$a^5 + \mathrm{A}a^4 + \mathrm{B}a^3 + \mathrm{C}a^2 + \mathrm{D}a + \mathrm{E} = 0,$$

the roots of which one assumes to be $a_1,\ a_2,\ a_3,....$ Hence, if one makes

$$y_1 + (\mathrm{A}+a)p_1 + (\mathrm{B}+b)q_1 + (\mathrm{C}+c)r_1 + (\mathrm{D}+d)s_1 = \mathrm{z}_1,$$

the equation will reduce itself to

$$z_1 - az_2 = \mathrm{X},$$

which, by an integration similar to that of no. 3, will give

$$z_m = a^m\left(\text{const.} + \int \tfrac{\mathrm{X}}{a^{m+1}}\right),$$

where m will express the m^{th} term z_m in the series of z. Now, as one must substitute for a each of the five roots $a_1,\ a_2,\ a_3,....\quad a^5+\mathrm{A}a^4+....=0$, the same five different values will be had of z_m that we express as above by $\mathrm{Z}_1,\ \mathrm{Z}_2,\ \mathrm{Z}_3$, ... ; thus, because

$$z_m = y_m + (\mathrm{A}+a)p_m + (\mathrm{B}+b)q_m + (\mathrm{C}+c)r_m + (\mathrm{D}+d)s_m,$$

in pursuing the letters $p_m,\ q_m,\ ...$, we will arrive at the formula

$$y_m = \mathrm{FZ}_1 + \mathrm{GZ}_2 + \mathrm{HZ}_3 + \mathrm{IZ}_4 + \mathrm{KZ}_5,$$

where F, G, H, ...are the constants to be determined by the comparison with just as many terms given in the series of y.

9. If X is constant, as it was shown in (4), expressing the sum be $\int\frac{\mathrm{X}}{a^{m+1}}$ and calling L the constant added to that integration, one will have finally

$$\mathrm{Z} = \mathrm{L}a^m + \mathrm{X}\frac{a^m-1}{a^m(a-1)},$$

from where consequently the values $\mathrm{Z}_1,\ \mathrm{Z}_2\ ,\ \mathrm{Z}_3$,....., can be found by substituting these values $a_1,\ a_2,\ a_3,....$ in place of a

10. From all these one can deduce the following general theorem ; if we have an equation where the indices of y denote their positions, where we have found all the roots $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,....$ of the equation

$$a^5 + \mathrm{A}a^4 + \mathrm{B}a^3 + \mathrm{C}a^2 + \mathrm{D}a + \mathrm{E} = 0,$$

and where we will have generally

$$y_m = \mathrm{F}a_1^m\left(\mathrm{L}+\int\frac{\mathrm{X}}{a_1^{m+1}}\right) + \mathrm{G}a_2^m\left(\mathrm{L}+\int\frac{\mathrm{X}}{a_2^{m+1}}\right) + \mathrm{H}a_3^m\left(\mathrm{L}+\int\frac{\mathrm{X}}{a_3^{m+1}}\right)$$
$$+\mathrm{I}a_4^m\left(\mathrm{L}+\int\frac{\mathrm{X}}{a_4^{m+1}}\right) + \mathrm{K}a_5^m\left(\mathrm{L}+\int\frac{\mathrm{X}}{a_5^{m+1}}\right) + ...,$$

and, in the case where X is constant,

$$y_m = \mathrm{L}\left(\mathrm{F}a_1^m + \mathrm{G}a_2^m + \mathrm{H}a_3^m + \mathrm{I}a_4^m + \mathrm{K}a_5^m + \ldots\right)$$
$$+\mathrm{X}\left(\mathrm{F}\frac{a_1^m-1}{a_1-1} + \mathrm{G}\frac{a_2^m-1}{a_2-1} + \mathrm{H}\frac{a_3^m-1}{a_3-1} + \mathrm{I}\frac{a_4^m-1}{a_4-1} + \mathrm{K}\frac{a_5^m-1}{a_5-1} + \ldots\right).$$

If $\mathrm{X} = 0$, the constant L can be suppressed , and we will have more simply

$$y_m = \mathrm{F}a_1^m + \mathrm{G}a_2^m + \mathrm{H}a_3^m + \mathrm{I}a_4^m + \mathrm{K}a_5^m + \ldots,$$

the known formula for the expression of the general term of the series of y, such that

$$y_m + \mathrm{A}y_{m-1} + \mathrm{B}y_{m-2} + \mathrm{C}y_{m-3} + \mathrm{D}y_{m-4} + \mathrm{E}y_{m-5} + \ldots = 0,$$

which is nothing other than a recurrent series, of which the step of the relation is $-\mathrm{A} - \mathrm{B} - \mathrm{C} - \mathrm{D} - \mathrm{E} - \ldots$

11. Hence in this way the theory of recurring sequences can be reduced to the differential calculus, and established in that manner on direct and natural principles, whereas until now it has been treated by a number of indirect ways. Further, the investigations which have been done on this matter have always bordered on the case $\mathrm{X} = 0$, and no one, that I know, has ever undertaken the general examination of the other cases, where X is constant or even variable, which nevertheless can be of the greatest importance for the resolution of several problems which lead to such equations, of which the theory of probability is mainly filled, as I intend to see at some other time in applying the theory I have just explained to this kind of calculation

SUR L'INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE A DIFFÉRENCES FINIES, QUI CONTIENT LA THÉORIE DES SUITES RÉCURRENTES.

(*Miscellanea Taurinensia,* t. 1, 1759.)

1. Soit proposée l'équation différentielle

$$dy + y\mathrm{X}dx = \mathrm{Z}dx,$$

où X et Z expriment des fonctions quelconques de la variable *x;* l'on sait que pour intégrer cette équation il suffit de faire

$$y = uz,$$

ce qui donne

$$udz + zdu + uzXdx = Zdx,$$

où l'on peut faire évanouir deux termes par une valeur convenable de *u* ou de *z.* Supposons donc

$$zdu + uz\mathrm{X}dx = 0,$$

et divisant par *z,* on aura

$$du + u\mathrm{X}dx = 0,$$

et par conséquent

$$\tfrac{du}{u} = -\mathrm{X}dx \text{ et } lu = -\int \mathrm{X}dx,$$

savoir

$$u = e^{-\int Xdx},$$

où *e* est le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1. Par cette supposition la proposée deviendra

$$udz = Zdx,$$

ce qui donne

$$dz = \tfrac{Zdx}{u},\ \ z = \int \tfrac{Zdx}{u} = \int e^{\int Xdx} Zdx,$$

et enfin

$$y = uz = \frac{\int e^{\int Xdx} Zdx}{e^{\int Xdx}}.$$

2. En observant le procédé de cette méthode, on verra aisément qu'elle doit pouvoir s'appliquer encore avec suceès aux équations différentielles qui ont la même forme que la précédente, quoique les différences soient supposées finies. Soit donc l'équation

$$dy + \mathrm{M}y = \mathrm{N},$$

dont la différentielle dy soit finie, et les autres quantités M et N soient des fonctions d'une autre variable quelconque x. Supposons en premier lieu

$$y = uz,$$

et l'on aura dans ce cas

$$dy = udz + zdu + dudz,$$

et l'équation se changera en

$$udz + zdu + dudz + \mathrm{M}uz = \mathrm{N}.$$

Qu'on pose comme ci-dessus les deux termes

$$zdu + \mathrm{M}uz = 0,$$

et on aura

$$du + \mathrm{M}u = 0,$$

savoir

$$\tfrac{du}{u} = -\mathrm{M};$$

pour résoudre cette équation dans notre cas où la différentielle du n'est pas infiniment petite, qu'on suppose $u = e^t$, et l'on aura

$$u + du = e^{t+dt} \text{ et } du = e^t\left(e^{dt} - 1\right);$$

d'où

$$\tfrac{du}{u} = e^{dt} - 1 = -\mathrm{M} \text{ et } e^{dt} = 1 - \mathrm{M},$$

et prenant les logarithmes,

$$dt = l\left(1 - \mathrm{M}\right);$$

et ensuite intégrant,

$$t = \int l\left(1 - \mathrm{M}\right);$$

mais on sait que la somme des logarithmes de plusieurs nombres est égale au logarithme du produit de tous ces nombres; donc, si l'on exprime généralement par $\varpi\left(1 - \mathrm{M}\right)$, le produit continuei de toutes les quantités contenues dans la formule $1 - \mathrm{M}$, on aura

$$t = l\varpi\left(1 - \mathrm{M}\right),$$

et par conséquent

$$u = e^t = \varpi\left(1 - \mathrm{M}\right).$$

Par l'évanouissement de ces deux termes l'équation devient

$$udz + dudz = \mathrm{N},$$

d'où l'on tire

$$dz = \frac{N}{u+du},$$

et, en intégrant,

$$z = \int \frac{N}{u+du}.$$

Mais ayant déjà trouvé $u = \varpi(1-M)$, si l'on exprime par M_1, le terme consécutif à *M*, on aura

$$u + du = \varpi(1-M_1),$$

et par conséquent

$$z = \int \frac{N}{\varpi(1-M_1)}.$$

et, puisque $y = zu$,

$$y = \varpi(1-M)\int \frac{N}{\varpi(1-M_1)};$$

ou bien, en ajoutant à cette intégration une constante quelconque A.

$$y = \varpi(1-M)\left(A + \int \frac{N}{\varpi(1-M_1)}\right).$$

3. Soit à présent proposée l'équation

$$y_1 = Ry + T,$$

où y_1 est le terme qui suit *y* dans la suite des *y;* puisque $y_1 = y + dy$, elle se réduira à

$$dy + (1-R)y = T.$$

Qu'on fasse donc

$$1-R = M,\ T = N,$$

et l'on trouvera pour la valeur de *y* l'expression suivante

$$y = \varpi R\left(A + \int \frac{T}{\varpi R_1}\right).$$

Si *R* est une quantité constante, il est clair que ϖR et ϖR_1 deviennent des puissances de R, dont l'exposant est égal au nombre qui dénote la place des termes *y* et y_1 dans la suite des *y;* soit donc *m* ce nombre, de sorte que y_m soit le même que *y,* et on aura

$$y_m = R^m\left(A + \int \frac{T}{R^{m+1}}\right).$$

Si T est constant, $\int \frac{T}{R^{m+1}}$ est egal à $T\int \frac{1}{R^{m+1}}$, où les termes exprimés par $\frac{1}{R^{m+1}}$ forment une progression géométrique, dont il sera aisé d'avoir la somme; soit cette somme, qui commence par $\frac{1}{R}$ égale à S, savoir que

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R^3}+\ldots+\frac{1}{R^m}=S$$

et on aura, en multipliant par *R*,

$$1+\frac{1}{R}+\frac{1}{R^2}+\ldots+\frac{1}{R^{m-1}}=SR=S+1-\frac{1}{R^m};$$

de cette ègalité l'on tirera

$$S=\frac{R^m-1}{R^m(R-1)}$$

par conséquent

$$y_m=R^m\left[A+T\frac{R^m-1}{R^m(R-1)}\right],$$

ou bien

$$y_m=AR^m+T\frac{R^m-1}{(R-1)}$$

4. Pour se convainere que cette valeur de y satisfait entièrement aux conditions de l'équation donnée

$$y_1=Ry+T \text{ ou bien } y_{m+1}=Ry_m+T,$$

on n'a qu'à multiplier la formule trouvée pour y_m par R, et lui ajouter la quantité *T*, et l'on trouvera le résultat

$$AR^{m+1}+T\frac{R^m-R}{R-1}+T$$

qui se réduit à

$$AR^{m+1}+T\frac{R^{m+1}-1}{R-1},$$

qui est la valeur que la formule générale nous donne pour le term y_{m+1}.

5. Après avoir trouvé la méthode d'intégrer toute équation différentielle à différences finies, comprise sous la forme générale

$$dy+My=N,$$

on pourra de même procéder à l'intégration des autres qui dépendent de celle-ci. Or, M. d'Alembert, dans les *Memoires de l'Académie Royale de Berlin,* a fait voir que toutes les équations différentielles, telles que

$$y+A\frac{dy}{dx}+B\frac{d^2y}{dx^2}+C\frac{d^3y}{dx^3}+....=X,$$

où A, B, C, ... sont des constantes quelconques, et où X est une fonction quelconque de *x,* se réduisent à une équation de cette forme :

$$z + \mathrm{H}\tfrac{dz}{dx} = \mathrm{V},$$

où H est une constante et V une fonction de *x,* laquelle équation est la même que nous avons appris à intégrer dans le cas même des différences finies. Si donc le procédé de M. d'Alembert peut avoir lieu aussi quand les différences sont finies, on pourra intégrer encore dans cette circonstance toute équation différentielle de cette forme :

$$y + \mathrm{A}dy + \mathrm{B}d^2y + \mathrm{C}d^3y + \ldots = \mathrm{X},$$

et par conséquent l'équation

$$y_1 + \mathrm{P}y_2 + \mathrm{Q}y_3 + \ldots = \mathrm{X},$$

qu'on peut regarder comme la formule générale des suites récurrentes.
La méthode de M. d'Alembert se trouve détaillée dans le second tome du *Calcul integral* de M. Bougainville; mais, pour épargner de la peine aux lecteurs, je tâcherai de la développer ici en peu de mots. Qu'on suppose

$$\tfrac{dy}{dx} = p, \tfrac{dp}{dx} = q, \tfrac{dq}{dx} = r, \ldots ,$$

et l'équation proposée se changera en

$$y + \mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C}\tfrac{dq}{dx} = \mathrm{X}.$$

Qu'on multiplie à présent chacune des équations qu'on a supposées par des coefficients indéterminés *a, b, c, ... ,* et qu'on les ajoute toutes à celle-ci, on aura

$$y + (\mathrm{A}+a)\,p + (\mathrm{B}+b)q - a\tfrac{dy}{dx} - b\tfrac{dp}{dx} + \mathrm{C}\tfrac{dq}{dx} = \mathrm{X}.$$

Soit fait en sorte que la première partie du premier membre de cette équation devienne un multiple exact de l'intégrale de la seconde, savoir que

$$dy + (\mathrm{A}+a)dp + (\mathrm{B}+b)dq = dy + \tfrac{b}{a}dp - \tfrac{\mathrm{C}}{a}dq,$$

et en comparant terme à terme il en résultera

$$\mathrm{A} + a = \tfrac{b}{a}, \quad \mathrm{B} + b = -\tfrac{\mathrm{C}}{a}.$$

de ces deux équations l'on tire

$$b = -\tfrac{\mathrm{C}}{a} - \mathrm{B} = \mathrm{A}a + a^2 \quad \text{et} \quad a^3 + \mathrm{A}a^2 + Ba + \mathrm{C} = 0,$$

dont les racines donneront trois valeurs de a qui satisferont également aux conditions requises. Supposons maintenant

$$y+(\mathrm{A}+a)p+(\mathrm{B}+b)q=z,$$

l'équation trouvée deviendra

$$z-a\frac{dz}{dx}=\mathrm{X},$$

laquelle, comparée avec delle du n° 1, donnera en intégrant

$$z=-e^{\frac{x}{a}}\int\frac{\mathrm{X}dx}{ae^{\frac{x}{a}}}.$$

Or, comme la quantité a peut avoir trois valeurs différentes, nommons les a_1, a_2, a_3 , et exprimons par Z_1, la valeur de z_1 qui contient a, par Z_2 celui qui contient a_2, et par Z_3 celui qui contient a_3 ; on aura donc les trois équations suivantes :

$$y+(\mathrm{A}+a_1)p+(\mathrm{B}+b_1)q=\mathrm{Z}_1,$$
$$y+(\mathrm{A}+a_2)p+(\mathrm{B}+b_2)q=Z_2,$$
$$y+(\mathrm{A}+a_3)p+(\mathrm{B}+b_3)q=\mathrm{Z}_3.$$

De ces trois équations on tirera la valeur de y, laquelle, à cause des quantités constantes $\mathrm{A}, \mathrm{B}, a_1, a_2, \ldots.$, se réduira à cette forme

$$y=\mathrm{FZ}_1+\mathrm{GZ}_2+\mathrm{HZ}_3,$$

où F, G, H sont des constantes dont la valeur dépend des autres $\mathrm{A}, \mathrm{B}, a_1, a_2, \ldots.$

6. Si l'on examine le procédé de cette méthode, il paraitra clairement que si l'équation eût contenu beaucoup plus de termes, par exemple qu'elle eût été

$$y+\mathrm{A}\frac{dy}{dx}+\mathrm{B}\frac{d^2y}{dx^2}+\mathrm{C}\frac{d^3y}{dx^3}+\mathrm{D}\frac{d^4y}{dx^4}+\mathrm{E}\frac{d^5y}{dx^5}=\mathrm{X},$$

on aurait trouvé de même

$$y=\mathrm{FZ}_1+\mathrm{GZ}_2+\mathrm{HZ}_3+\mathrm{IZ}_4+\mathrm{KZ}_5$$

où les quantités $\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2, \ldots.$ sont des fonctions de X et x; telles que

$$z=-e^{\frac{x}{a}}\int\frac{\mathrm{X}dx}{ae^{\frac{x}{a}}},$$

en posant pour les racines $a_1,\ a_2\ ,a_3,\ a_4,\ a_5$, de cette équation

$$a^5 + \mathrm{A}a^4 + \mathrm{B}a^3 + \mathrm{C}a^2 + \mathrm{D}a + \mathrm{E} = 0;$$

de plus ou s'apercevra que les opérations que requiert cette méthode peuvent également se faire, soit que les différences soient finies, ou qu'elles soient infiniment petites.

7. Ayant donc l'équation à différences finies

$$y + \mathrm{A}dy + \mathrm{B}d^2y + \mathrm{C}d^3y + \mathrm{D}d^4y + \mathrm{E}d^5y = \mathrm{X}.$$

et posant

$$dy = p,\ dp = q,\ dq = r,\ dr = s,$$

on parviendra de la même manière à une équation telle que

$$z - adz = \mathrm{X},$$

$$z = y + (\mathrm{A} + a)p + (\mathrm{B} + b)q + (\mathrm{C} + c)r + (\mathrm{D} + d)s,$$

et la quantité a dépendra de cette équation

$$a^5 + \mathrm{A}a^4 + \mathrm{B}a^3 + \mathrm{C}a^2 + \mathrm{D}a + \mathrm{E} = 0,$$

dont les racines ont déjà été supposées $a_1,\ a_2\ ,a_3,\ a_4,\ a_5$. Que l'on compare à présent l'équation

$$z - adz = \mathrm{X}$$

avec celle du n° 2, savoir

$$dy + \mathrm{M}y = \mathrm{N},$$

et on aura

$$\mathrm{M} = -\tfrac{1}{a},\ \ \mathrm{N} = -\tfrac{\mathrm{X}}{a};$$

par conséquent

$$1 - \mathrm{M} = \tfrac{1+a}{a},$$

ce qui donne enfin

$$z = \varpi\left(\tfrac{1+a}{a}\right)\left[\text{const.} + \int \frac{-\frac{X}{a}}{\varpi\left(\frac{1+a}{a}\right)}\right],$$

ou bien, puisque a est constant,

$$z_m = \left(\tfrac{1+a}{a}\right)^m \left[\text{const.} - \int \tfrac{\mathrm{X}a^m}{(1+a)^{m+1}}\right],$$

m exprimant comme ci-dessus le quantième du terme *z* dans la série des *z.* Si l'on fait de plus X constant, on aura, en prenant la somme de la progression géométrique exprimée par $\int \frac{a^m}{(1+a)^{m+1}}$,

$$z_m = \left(\tfrac{1+a}{a}\right)^m \left[\text{const.} - \mathrm{X}\frac{(1+a)^m - a^m}{(1+a)^m}\right].$$

Or, comme *a* peut avoir les valeurs $a_1,\ a_2\ , a_3,\ a_4,\ a_5,$ il est clair qu'en substituant chacune d'elles dans la formule trouvée, il en résultera autant de valeurs de z_m qui satisferont toutes également. Soient donc toutes ces valeurs exprimées par $\mathrm{Z}_1,\ \mathrm{Z}_2,\ \mathrm{Z}_3,\ \mathrm{Z}_4,\ \mathrm{Z}_5$, et puisque

$$z = y + (\mathrm{A}+a)p + (\mathrm{B}+b)q + (\mathrm{C}+c)r + (\mathrm{D}+d)s,$$

on tirera, par le moyen des cinq équations

$$z = \mathrm{Z}_1,\ z = \mathrm{Z}_2,\ z = \mathrm{Z}_3,\ z = \mathrm{Z}_4,\ z = \mathrm{Z}_5,$$

l'expression suiyante de *y,* savoir

$$y = \mathrm{FZ}_1 + \mathrm{GZ}_2 + \mathrm{HZ}_3 + \mathrm{IZ}_4 + \mathrm{KZ}_5.$$

8. Soit enfin proposée l'équation

$$y_1 + \mathrm{A}y_2 + \mathrm{B}y_3 + \mathrm{C}y_4 + ... = \mathrm{X},$$

où $y_1, y_2, y_3, ...$ expriment des termes consécutifs de la suite des *y*; il est d'abord evident que, puisque

$$y_2 = y_1 + dy_1,\ y_3 = y_1 + 2dy_1 + d^2y_1,$$

et ainsi des autres, cette équation peut être ramenée à la forme de celle que nous venons d'examiner; mais, puisque le calcul devient de cette façon trop long, il sera utile de la résoudre directement par les mêmes principes que nous avons employés jusqu'ici. De plus, afin de pouvoir plus aisément appliquer cette équation aux séries récurrentes, il sera mieux de considérer les termes $y_1, y_2, y_3, ...$ dans un ordre renversé, savoir que

$$y_2 + dy_2 = y_1,\ \ y_3 + dy_3 = y_2$$

et ainsi des autres, de sorte que les indices 1, 2, 3, ... dénotent la distance de chaque terme au dernier *y*. Supposons

$$y_2 = p_1, \text{ et l'on aura } y_3 = p_2;$$

soit donc de nouveau

$$p_2 = q_1 \quad \text{et} \quad p_3 = q_2;$$

soit encore

$$q_2 = \mathrm{r}_1 \quad \text{et} \quad q_3 = r_2 = s_1$$

et l'on aura

$$y_2 = p_1, \quad y_3 = q_1, \quad y_4 = r_1, \quad y_5 = s_1, \quad y_6 = s_2;$$

substituant ces valeurs dans la proposée, elle deviendra

$$y_1 + \mathrm{A}p_1 + \mathrm{B}q_1 + \mathrm{C}r_1 + \mathrm{D}s_1 + \mathrm{E}s_2 = \mathrm{X}.$$

Qu'on réduise à présent les suppositions précédentes en équations, savoir

$$p_1 - y_2 = 0, \quad q_1 - p_2 = 0, \quad r_1 - q_2 = 0, \quad s_1 - r_2 = 0,$$

et après les avoir multipliées par les coefficients indéterminés *a, b, c, ... ,*qu'on les ajoute toutes à celle qu'on vient de trouver. Il en résultera la suivante

$$\left.\begin{array}{c} y_1 + (\mathrm{A}+a)p_1 + (\mathrm{B}+b)q_1 + (\mathrm{C}+c)r_1 + \left(\mathrm{D}+d\right)\mathrm{s}_1 \\ -ay_2 - bp_2 - cq_2 - dr_2 + \mathrm{E}s_2 \end{array}\right\} = \mathrm{X}.$$

Qu'on fasse maintenant que chaque coefficient de la premièt·e partie soit multiple de la même manière de son correspondant dans la seconde, l'on parviendra aux mêmes équations qu'on a trouvées (6), et la quantité *a* sera déterminée par l'équation

$$a^5 + \mathrm{A}a^4 + \mathrm{B}a^3 + \mathrm{C}a^2 + \mathrm{D}a + \mathrm{E} = 0,$$

dont on a supposé les racines $a_1,\ a_2,\ a_3,....$ Donc, si l'on fait

$$y_1 + (\mathrm{A}+a)p_1 + (\mathrm{B}+b)q_1 + (\mathrm{C}+c)r_1 + (\mathrm{D}+d)s_1 = \mathrm{z}_1,$$

l'équation se réduira à

$$z_1 - az_2 = \mathrm{X},$$

qui, par une intégration semblable à celle du n° 3, donnera

$$z_m = a^m\left(\text{const.} + \int \tfrac{\mathrm{X}}{a^{m+1}}\right),$$

oü m exprimera le quantième du terme z_m dans la suite des z. Or, comme pour a l'on peut substituer chacune des cinq racines $a_1,\ a_2,\ a_3,....$ l'équation $a^5+\mathrm{A}a^4+....=0$, on aura de même cinq valeurs differentes de z_m que nous exprimerons comme ci-dessus par $\mathrm{Z}_1,\ \mathrm{Z}_2,\ \mathrm{Z}_3$, ... ; donc, à cause que

$$z_m=y_m+(\mathrm{A}+a)p_m+(\mathrm{B}+b)q_m+(\mathrm{C}+c)r_m+(\mathrm{D}+d)s_m,$$

on parviendra, en chassant les lettres $p_m,\ q_m,\ ...$, à la formule

$$y_m=\mathrm{FZ}_1+\mathrm{GZ}_2+\mathrm{HZ}_3+\mathrm{IZ}_4+\mathrm{KZ}_5,$$

oü]F, G, H, ... sont des constantes qu'on doit déterminer par la comparaison d'autant de termes donnés dans la suite des y.

9. Si X est constant, par ce qu'on a démontré (4), la somme exprimée par. $\int\frac{\mathrm{X}}{a^{m+1}}$ et nommant L la constante ajoutée à cette intégration, on aura finalement

$$\mathrm{Z}=\mathrm{L}a^m+\mathrm{X}\frac{a^m-1}{a^m(a-1)},$$

d'où l'on tirera par conséquent les valeurs $\mathrm{Z}_1,\ \mathrm{Z}_2$, Z_3 ,....., en substituant à la place de a ses valeurs $a_1,\ a_2,\ a_3,....$

10. De tout ceci l'on peut déduire le théorème général suivant; si l'on a l'équation oü les indices des y dénotent leurs places, que l'on cherche toutes les racines $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,....$ de l'équation

$$a^5+\mathrm{A}a^4+\mathrm{B}a^3+\mathrm{C}a^2+\mathrm{D}a+\mathrm{E}=0,$$

et l'on aura généralement

$$y_m=\mathrm{F}a_1^m\left(\mathrm{L}+\int\frac{\mathrm{X}}{a_1^{m+1}}\right)+\mathrm{G}a_2^m\left(\mathrm{L}+\int\frac{\mathrm{X}}{a_2^{m+1}}\right)+\mathrm{H}a_3^m\left(\mathrm{L}+\int\frac{\mathrm{X}}{a_3^{m+1}}\right)$$
$$+\mathrm{I}a_4^m\left(\mathrm{L}+\int\frac{\mathrm{X}}{a_4^{m+1}}\right)+\mathrm{K}a_5^m\left(\mathrm{L}+\int\frac{\mathrm{X}}{a_5^{m+1}}\right)+...,$$

et, dans le cas oü X est constant,

$$y_m = \mathrm{L}\left(\mathrm{F}a_1^m + \mathrm{G}a_2^m + \mathrm{H}a_3^m + \mathrm{I}a_4^m + \mathrm{K}a_5^m + \ldots.\right)$$
$$+\mathrm{X}\left(\mathrm{F}\frac{a_1^m-1}{a_1-1} + \mathrm{G}\frac{a_2^m-1}{a_2-1} + \mathrm{H}\frac{a_3^m-1}{a_3-1} + \mathrm{I}\frac{a_4^m-1}{a_4-1} + \mathrm{K}\frac{a_5^m-1}{a_5-1} + \ldots.\right).$$

Si $\mathrm{X} = 0$, on pourra supprimer la constante L, et l'on aura plus simplement

$$y_m = \mathrm{F}a_1^m + \mathrm{G}a_2^m + \mathrm{H}a_3^m + \mathrm{I}a_4^m + \mathrm{K}a_5^m + \ldots.,$$

formule connue pour l'expression du terme général de la suite des *y,* telle que

$$y_m + \mathrm{A}y_{m-1} + \mathrm{B}y_{m-2} + \mathrm{C}y_{m-3} + \mathrm{D}y_{m-4} + \mathrm{E}y_{m-5} + \ldots = 0,$$

ce qui n'est autre chose qu'une suite récurrente, dont l'échelle de relation est $-\mathrm{A} - \mathrm{B} - \mathrm{C} - \mathrm{D} - \mathrm{E} - \ldots.$

11. Voilà donc la théorie des suites récurrentes réduite au calcul différentiel, et établie de cette façon sur des principes directs et naturels, au lieu que jusqu'ici elle n'a été traitée que par des voies tout à fait indirectes. De plus, les recherches qu'on a faites sur cette matière ont toujours été bornées au cas de $\mathrm{X} = 0$, et personne, que je sache, n'a jamais entrepris d'examiner généralement les autres cas, où X est constant ou même variable, ce qui peut néanmoins être de la dernière importance pour la résolution de plusieurs problèmes qui conduisent à de telles équations, dont la doctrine des hasards est principalement remplie, comme je me propose de le faire voir une autre fois en appliquant à cette espèce de calcul la théorie que je viens d'expliquer.