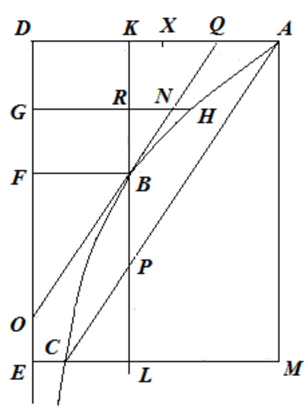
Huygens' : *Discours De La Cause De La Pesanteur* (p. 169 onwards) from his *Traite De La Lumiere, relating to the Logistic curve.*

…….

I have viewed with pleasure what Mr. Newton wrote regarding the falling and projecting of heavy bodies in air, or in some other medium that resists motion ; having formerly applied myself to the same question. And since this matter pertains in part to that of weight, I think I shall be able to set out here what I discovered then. However I shall be able to give only an abridged version without demonstrations attached, having neglected to finish these, because that speculation did not seem to be very useful, nor indeed as a consequence, from the amount of difficulties which would be encountered there.

There primarily I examined these motions, on supposing that the resistive forces are as the speeds of the body, which then appeared to me to be very reasonable. But having obtained that which I was looking for, I found out almost at the same time, from the experiments that we had done at the Academy of Science in Paris, that the resistance of air and water was as the square of the speeds. And the reason for that is very easy to understand; because a body, going for example twice as fast, is met by twice as many particles of air or water, and at twice the speed. Hence I saw my new theory overturned, or at the least not to be useful. After that I wished rather to look for that theory which would give rise to the true foundations of resistances; where I saw the matter to become much more difficult, and especially regarding the curve which a body would travel along when thrown obliquely.



In the first supposition, where the resistances are as the speeds, I noted that, to find the distances passed through in certain time intervals, when the bodies fall or rise perpendicularly, and to know the speeds at the ends of these times, it was necessary to have a curved line, which I had examined a long time before, which was of the greatest help in this investigation. One could call it the *Logarithmic* or the *Logistic* curve, as I did not know if anyone had yet given it a name, or what others had considered it ought to be called. This indefinite line being A B C, it has a right line for the asymptote such as D E ; on which if one takes some equal parts following each other, such as D G, G F, and that one draws perpendiculars from the points D, G, F, as far as to the curve, to wit D A, G H , F B, these lines will be in continued proportion. From which it can be seen that it is easy to find as many points as wished on this curve; which I will show after some properties which deserve to be considered. In order to explain that concerned with the fall of bodies, I repeat here initially what I have written at the end of the treatise on the Centre of Forces : to understand how a body, in falling through the air, by continually increasing its speed, but always in such a way that it will never be able to exceed nor able even to reach a certain level ; which is the speed with which it would be necessary for the air to blowing up from below, for the body to be held suspended without being able to fall ; for then, the force of the air against this body is equal to its weight. I call this speed, for each body, the *terminal* speed.

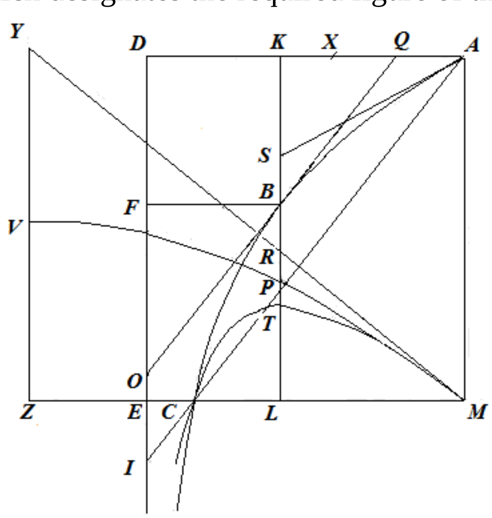
Huygens' : *Discours De La Cause De La Pesanteur* (p. 169 onwards) from his *Traite De La Lumiere, relating to the Logistic curve.*

Now if a heavy body is thrown perpendicularly up to a height, with a speed whose speed shall be given in a ratio to the terminal speed, for example as in the ratio of the lengths A K to K D on the given ordinate AD, perpendicularly to the asymptote D E ; K B shall remain parallel to this asymptote, and the curve shall be touched by the right line B O at the point B, which meets D E in O , and D A in Q. Which tangent is itself found by taking F O, since the ordinate B F, is equal to a certain length, which is the same for all the tangents, and which I shall define in the following. Then AC shall be parallel to this tangent, cutting K B produced at P*;* and the point C, where it meets the curve, C L M shall be drawn , parallel to A D, and cutting K B produced, and A M parallel to the asymptote, to the points L and M. Now the time in which the body put to rise to the height which it is able to reach, is to the time of its descent from the same height, as the line K B to B L.

And the time taken to rise up through the air, being thrown upwards as it has been said, is to the time it would take without encountering resistance, as K B to K P.

And the height to which it will rise in air, to that which it would rise without resistance, shall be as the area of the triangle A B K to the area of the triangle A P K, or as Q A to A X, which I consider to be half the third proportion to the lines D K, K A. And its speed, at the start of the ascent, to that had on returning to the ground, shall be as M L to L C.

One finds further, for this same line, which is the curve a body projected obliquely traverses. For, in the same figure, if the angle of projection, above the line of the horizontal, is L M R , with a given speed, then the motion upwards shall be to the terminal velocity as A K to K D : let the last construction be repeated, and as the right line A S, which touches the curve A B C at A, meets K B at S. Then as S P to P B thus R L shall be to L T, and on the base M C a figure proportional to the segment A B C P shall be erected, of such a kind that the parallel and equal distances from the asymptote D E, in both figures, all have the same ratio of B P to TL. This will be the curve M T C which designates the required figure of the trajectory.



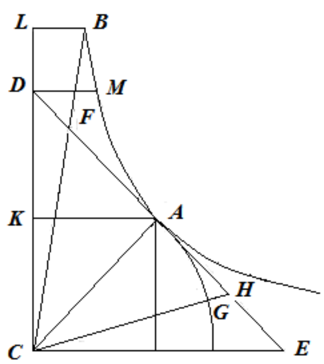
And because the height risen with resistance, shall be to the height of the free projectile, as Q A to AX; if one makes so that TL shall have this same ratio to another line V Z ; that will be the height M V of the Parabola which the free projectile accomplishes, beginning at M with the same force, and in the same direction M R, as the other projectile had. Of such a kind that if in the angle LMR one adjusts Y Z perpendicular to M C, and equal to twice V Z, one will have the peak of that parabola at V at the centre of Y Z , and M Z half its base or magnitude.

It is to be notes that, whatever the angle of elevation LMR shall be, provided that the vertical speed remains the same, one finds here the same magnitude ME. But it is necessary to be aware that these are only the shapes of the trajectories that one finds in this fashion, and yet the heights and magnitudes of the different projectiles not to be compared with each other. For they must all be of the same height, when the vertical speed is the same. That is why then each shape of the trajectory, thus found, must be reduced to a proportional shape of equal height, if one wants to know how the widths and heights of different trajectories are to one another.

I add here also, that the Logarithmic line not only serves to find the curves of trajectories, but it is the same curve itself in that case, to wit, when one projects a body obliquely downwards, so that there it will fall vertically with a speed equal to the terminal speed. For then that body follows the curve of such a line, in always approaching asymptote, without the power to reach it. And what determines the kind of the curve, is that its *subtangent*, (I thus will call the line F O, which is the same for all the tangents) will be twice the height to which the terminal velocity is able to raise the body, without the resistance of the medium.

These are the things that I found on assuming there the resistance to be as the speed, but all this theory being based, as I have said, on a principle, the nature of which was not at all in accord with the resistances of air and water, which thus I set aside entirely ; and it was none other than the occasion of Newton's treatise that I have taken it up again, to see if by looking in very different ways, by necessity it would be in agreement. That which was found to be thus: for the construction of the curve of the trajectory, which he gives in proposition 4 of the 2nd Book, although quite different from mine and more difficult, nevertheless produced the same curve, as that can be proven by demonstration.

In examining what arises in the true hypothesis of resistance, which is in the ratio of the speed squared, I have seen only this particular case determined, of a body projected upwards at its terminal velocity ; to know that the whole time of its flight, is to the time taken to rise to its maximum height without resistance, as the circle to the circumscribed square. And that the height of the first projectile is to the height of the other, as the area between a hyperbola and its asymptote, terminated by two lines parallel to the other asymptote which shall be in the ratio of 2 to 1, to the rectangle or parallelogram of the same hyperbola. That is to say, as in the following figure, the area A M D K to the square A C. I had not investigated any other cases, which are contained entirely in prop. 9, of the 2nd book Mr. Newton, which is very beautiful : and what hindered me, which I could not discover at all in the way I was following, the measure of the descents of bodies, by not supposing it depended on the quadrature of a certain curved line, as I did not know it depended on the quadrature of the hyperbola. I reduced the measure of the area of this curve to an infinite progression, $a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5 + \frac{1}{7}a^7 + \&c$. Not knowing that the same progression also gave the measure of a hyperbolic sector : which I have seen since, in comparing Newton's demonstration with what I had found.



But because this progression, for finding the measure of the hyperbola, has not yet been noted as far as I know, I would like to explain here how it is useful there. A hyperbola under A B , of which the asymptotes DC , CE, make a right angle, the half axis

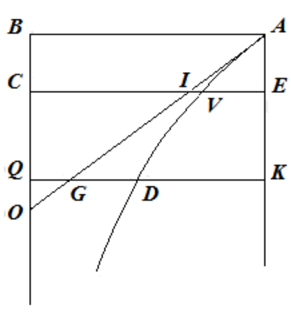
Huygens' : *Discours De La Cause De La Pesanteur* (p. 169 onwards) from his *Traite De La Lumiere, relating to the Logistic curve.*

shall be CA, perpendicular to D A E which touches the hyperbola; and as A C B shall be a sector, the line C B cutting A D in F. If now one takes A C or A D as one, and as A F may be called *a,* which is a fraction less than one, when AF, A D are commensurate ; I say that as the sum of the infinite progression $a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5 + \frac{1}{7}a^7 + \&c$. to 1, thus the area of the sector A C B will be to the triangle A C D . Or if one puts the perpendiculars A K, B L on the asymptote, one can say the same thing about the area A B L K , which is equal to this sector, as one can readily see by the equality of the triangles C A K, C B L. So that this progression for the hyperbola, corresponds to that which Mr. Leibnitz has given for the circle, for which, if the sector of the circle is A C G, having A C for the radius, and as C G cuts AE in H; AH being called *a,* and A E equal to 1 ; the sum of the progression $a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5 - \frac{1}{7}a^7 + \&c$ is to 1, as the sector A C G is to the triangle A C G , or as the arc AG to the right line A E.

As far as the oblique line of the projectile is concerned ; it would suffice with resistance of this kind, to know the horizontal and vertical motions of a body, in order to compose the oblique motion, as thus in the first hypothesis, there would be there the means of determining the points through which this line must pass : and the logarithmic curve would be useful there, being turned in such a way that its asymptote should be parallel to the horizontal ; and that again would become the curve of the projectile, in the case where I have said it would be useful before. But this composition of the motions has no place here; because the diminution of the retarded motion, along the diagonal of a rectangle, is not proportional to the diminutions along the sides ; it is extremely difficult, if not impossible, to resolve this problem.

The horizontal motion being considered separately, as like that of a ball rolling on a level floor, and what is remarkable here, that it must go all the way to infinity, notwithstanding the resistance of the medium, for when the resistance is as the speed it is borne along thus, and yet restrained so that it cannot attain that limit in a finite time. And this infinity is proved easily by Proposition 5 of Book 2 of Newton's treatise, because the area comprised between the hyperbola and its asymptotes is infinite.

The properties of the Logistic curve, which I have promised to report, and some of which have been used to find what I have noted regarding motion through air, are as follows ; in addition to the first, which I wished to indicate, concerning the proportionality of the ordinates to the asymptote, when they are equally spaced, through which the points on this line are found.



I . That the areas, taken between two ordinates to the asymptote, are between themselves as the differences of these ordinates. Thus in this figure, where A V D is the Logistic, B O its [vertical] asymptote, and the ordinates A B, V C , D Q ; of which the latter, being continued, meet A K , parallel to the asymptote, at E, K; the areas A B C V , A B Q D are between themselves as the lines E V, K D.

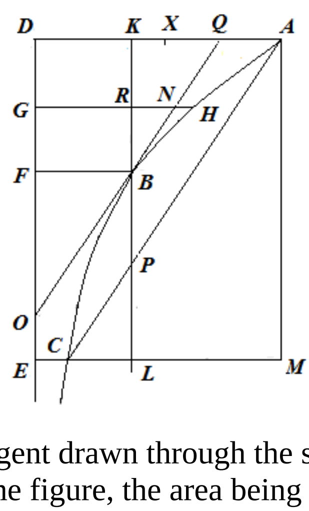
Huygens' : *Discours De La Cause De La Pesanteur* (p. 169 onwards) from his *Traite De La Lumiere, relating to the Logistic curve.*

2. That the same things being in place, and A O being the tangent at the point A, which cuts C E, Q K, in I & G; the areas A V E, A D K are between themselves as the lines V I, D G.
[Thus, the logarithmic curve is self-similar : the behavior of the curve with the asymptote at infinity, as above in 1., is repeated for the tangent at some finite point A on the curve.]

3. That the area comprised between two ordinates is to the infinite area, as the smaller of these ordinates extended between the logistic curve and its asymptote, as the difference of these same ordinates is to the smaller. When I say that an infinite area has a certain ratio to a finite area, that indicates that it approaches so close to the size of a given area, which to that proportion for a finite area, as the difference must become less than any given area. In the preceding diagram, the area A B Q D is to the infinite area, which since D Q extends between the curve and the asymptote, as K D to D Q.

4. That the subtangent, such as B O in the same figure, is always of one same length, from whatever point of the logistic the tangent pertains.

5. That which length can be found by an approximation, and which is to the part of the asymptote , taken between the ordinates of the ratio squared, as 434294481903251804 to 301039995663981195 ; or, close enough, as 13 to 9.
[Thus, leaping ahead to an analytical viewpoint, if we set the two ordinates EV and KD to be located so that the ratio of the areas A E V and A K D in the figure is 2, with O as the origin, and taking Q as the abscissa *x*, C to be $x+1$, and B to be $x+2$; *i.e.* in an arithmetical progression, and the ordinates taken to be $y = a^x, = a^{x+1}, = a^{x+2}$, etc. , *i.e.* in a geometric progression, for some $a > 1$, then the subtangent is $= \frac{y}{dy/dx} = \frac{a^x}{de^{x \ln a}/dx} = \frac{1}{\ln a}$; if $a = 2$, then $\ln 2 = \log 2 : \log e =$ 0.30103....to 0.43429...... and the result follows, for a given *a*; In the case $a = e$ the subtangent has constant unit length.]



6. That if there shall be three ordinates, as there are in this figure A D, H G , B F, and that through the smallest point of the curve, one draws a line parallel to the asymptote which cuts the other two ordinates at R & K , and the tangent B Q which cuts these at N and Q ; the areas of the three-lined figures A B K, H B R are between themselves, as the parts of the ordinates between the curve and the tangent, known as A Q, H N.

7. Because the limitless area between an ordinate, the logistic curve , and its asymptote, with respect to the side to which the latter two lines approach each other, is twice the area of the triangle composed from the ordinate, the tangent drawn through the same point as the ordinate, and the subtangent. Thus, in the same figure, the area being boundless, since the ordinate B F, is twice that of the triangle B F O.

Huygens' : *Discours De La Cause De La Pesanteur* (p. 169 onwards) from his *Traite De La Lumiere, relating to the Logistic curve.*

[The unbounded area $= \int_{-\infty}^{x_F} e^x dx = e^{x_F} = FB$, while the area of $B\,F\,O$ is $\frac{1}{2}BF$.]

8. Because the area, taken between two ordinates, is equal to the rectangle from the subtangent and the difference of the same ordinates. Thus, in the same figure, the area A D F B is equal to the rectangle made from the subtangent F O and from K A.

9. The volume which the infinite area from an ordinate, in turning around the asymptote, is one and a half times the cone, the height of which is equal to the subtangent, and the radius of the base is equal to the same ordinate. Thus the volume which the infinite area B F O C makes, in turning around about F O, is three on two of the cone which the triangle B F O makes, in turning around the same F O.

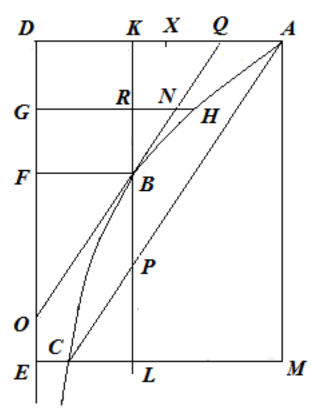
10. That the volume produced by the same infinite area, in turning around the ordinate B F, from which it starts, is six times the cone which makes the triangle B F O, by that rotating on B F. From which it follows the measure of the solids ;

11. That the centre of gravity of the infinite area, from one ordinate, is at that distance from the ordinate, of the length of the subtangent.

12. That this same measure of the centre of gravity is at a distance of a quarter of the ordinate from the asymptote.

13. I have seen from the one found that the centre of gravity of the first of these infinite volumes, it at a distance from its base of half of the subtangent.

I4. And that the centre of gravity of the other volume is at a distance from its infinite base, of one eighth of its axis.



15. One knows that this logarithmic curve is rather useful in the quadrature of the hyperbola, from the demonstrations of Father Gregorius of St. Vincent, concerning the hyperbolic areas taken between two ordinates on one of the asymptotes. And that if there were two such areas, of which the ordinates of the one shall be as A D to H G in the latter figure, and the ordinates of the other as B F to C E ; these areas will be between themselves as the lines D G to F E. But there is no need to note, as I know, that these same hyperbolic areas are to the parallelogram of the hyperbola (thus I call the parallelogram of whom the sides are the two ordinates on the asymptotes, drawn from the one same point of the section) with each of the lines D G , F E , from the subtangent F O. Of such a kind that, if the parallelogram of the hyperbole is considered to be of 0,4342944819 parts, each hyperbolic areas, taken between the two ordinates from one of the asymptotes, will be to

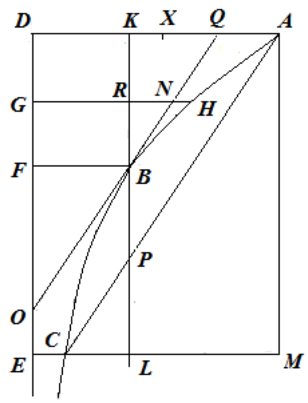
this parallelogram, as the logarithm of the proportion of the same ordinates, that is to say, as the difference of the logarithms, the numbers which express the proportion of the ordinates, to the number 0,4342944819 ; on taking these logarithms of 10 places without the characteristic. And from this it is easy to verify the quadrature of the hyperbola which I have given in the Treatise on the evolution of curved lines, which is in my *Horologium Oscillatorium.*

End.

J'ay vu avec plaisir ce que Mr. Newton écrit touchant les chùtes & les jets des corps pesants dans l'air,ou dans quelqu'aute milieu qui resiste au mouvement;m'estant appliqué autrefois a la mesme recherehe. Et puisque cette matiere appartient en partie à celle de la Pesanteur, je crois pouvoir raporter icy ce que j'en decouvris alors. Ce que je ne seray pourtant qu'en abregé bregé & sans y joindre les demonstrations; ayant negligé de les achever, parce que cette speculation ne m'a pas semblé assez utile, ni de consequence, à proportion de la difficulté qui s'y rencontre.

J'examina y premierement ces mouvemens,en supposant que les forces de la Resistance sont comme les Vitesses des corps, ce qui alors me paroissoit fort vraisemblable. Mais ayant obtenu ce que je cherchois, J'appris presque en mesme temps, par les experiences que nous fîmes à Paris dans l'Academie des Sciences, que la resistence de l'air, & de l'eau, estoit comme les quarrez des vitesses. Et la raison est assez aisée a concevoir; parce qu'un corps, allant par exemple avec double vitesse, est rencontré par deux fois autant de particules de l'air ou de l'eau, & avec double celcrité.Ainsi je vis ma nouvelle Theorie renversée, ou du moins inutile. Apres quoy je voulus aussi chercher ce qui arrive lors qu'on suppose ce veritable fondement des Resistances; ou je vis que la chose estoit beaucoup plus difficile, & surtout en ce qui regarde la ligne courbe que parcourent les corps jettez obliquement.

Huygens' : *Discours De La Cause De La Pesanteur* (p. 169 onwards) from his *Traite De La Lumiere, relating to the Logistic curve.*



Dans la premiere supposition, ou les resistances sont comme les vitesscs, je remarquay que, pour trouver les espaces passez en de certains temps, lors que les corps tombent ou montent perpendiculairement, & pour connaître les vitesses au bout de ces temps, il y avoir une ligne courbe, que j'avais examinée longtemps auparavant, qui estoit de grand usage en cette recherche. On la peut appeller la *Logarithmique* ou la *Logistique*, car je ne vois pas qu'on luy ait encore donné de nom , quoyque d'autres l'aient encore considerée cy devant. Cette ligne infinie estant A B C, elle a une ligne droite pour Asymptote, comme D E ; dans laquelle si on prend des parties égales quelquonqucs qui se suivent, comme D G, G F, & que l'on tire des points D, G, F, des perpendiculaires jusqu'à la courbe , sçavoir D A, G H , F B, ces lignes seront proportionelles continues. D'ou l'on voir qu'il est aisé de trouver autant de points qu'on veut dans cette courbe; de la quelle je raporteray par apres quelques proprietez qui meritent d'estre considerées. Pour expliquer ce qui est des chutes des corps, je repete icy premierement ce que j'ay ecrit à la fin du Traite du Centre d 'Agitation : sçavoir qu'un corps , en tombant à travers l'air, augmente continuellement sa vitesse, mais toutefois en sorte qu'il n'en peut jamais exceder, ni mesme atteindre, un certain degré; qui est la vitese qu'il faudrait à l'air à soufler de bas en haut, pour tenir le corps suspendu sans pouvoir descendre ; car alors, la force de l'air contre ce corps, égale sa pesanteur. J'appelle cette vitese, dans chaque corps, la vitesse *Terminale.*

Si donc un corps pesant est jetté perpendiculairement en haut, avec une vitesse dont la raison à la vitesse Terminale soit donnée, par exemple comme de la partie A K à K D dans l'ordonnee AD, perpendiculaire à l'asymptote D E ; soit menee K B parallele à cette Asymptote, & qu'au point B la courbe soit touchée par la droite B O, qui rencontre D E en O , & D A en Q. Laquelle tangente se trouve en prenant F O, depuis l'ordonnée B F, égale à une certaine longueur, qui pour toutes les tangentes est la meme , & que je definiray dans la suite. Puis soit AC parallele à cette tangente, coupant K B prolongée en P; & du point C, ou elle rencontre la courbe, soit tirée C L M, parallelle a A D, & coupant K B prolongée , & A M parallele à l'asymtote, aux points L & M. Maintenant le temps que le corps met a monter à la hauteur ou il peut arriver, est au temps de sa descente de cette mesme hauteur, comme la ligne K B à B L.

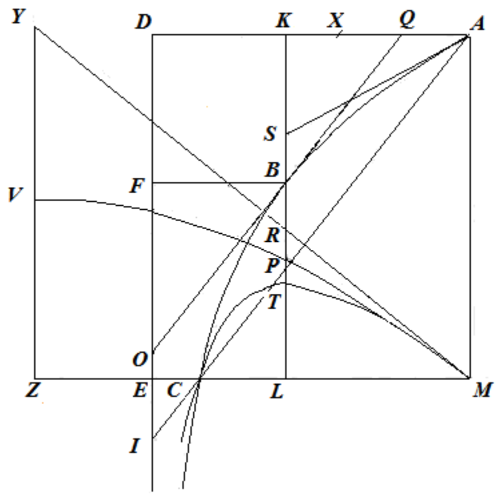
Et le temps qu'il emploie a monter à travers l'air, estant jetté comme il a esté dit, est au temps qu'il emploieroit sans rencontrer de resistence, comme K B à K P.

Et la hauteur à laquelle il montera dans l'air, à celle ou il monteroit sans resistence , comme l'espace A B K au triangle A P K, ou comme Q A à A X, que je suppose estre la moitié d'une troisieme proportionellc aux lignes D K, K A.

Et sa vitesse, en commençant de monter, à celle qu'il a en retombant a terre, comme ML à L C.

Huygens' : *Discours De La Cause De La Pesanteur* (p. 169 onwards) from his *Traite De La Lumiere, relating to the Logistic curve.*

On trouve de plus , par cette mesme ligne , quelle est la courbe que parcourt un corps jetté obliquement. Car, dans la mesme figure, si l'angle du jet, sur la ligne horizontale, est L M R , avec une vitesse donnée , dont le mouvement en haut soit a la vitesse Terminale comme A K à K D soit repetée la construction precedente, & que la droite A S, qui touche la courbe A B C en A, rencontre K B en S. Puis commes S P a P B ainsi soit R L à L T, & sur la base M C soit dressée une figure proportionelle au segment A B C P, en sorte que les paralleles & également distances de l'asymptote D E, dans l'une & t'autre figure, aient par tout la mesme raison de B P à TL. Ce sera la courbe M T C qui marquera la figure requise du jet.



Et parce que la hauteur de l'évation avec resistance, estoit à la haureut du jet libre , comme Q A à AX; si l'on fait que TL ait cette mesme raison à une autre ligne V Z ; ce sera la hauteur de la Parabole M V que fait ce jet libre , commencé en M avec la mesme force, & dans la mesme direction MR, qu'avoit l'autre jet. De sorte que si dans l'angle LMR on ajuste Y Z perpendiculaire à M C, & égale à la double V Z, on aura le sommet de cette parabole en V au mÎllieu de Y Z , & sa demie base ou demie amplitude M Z.

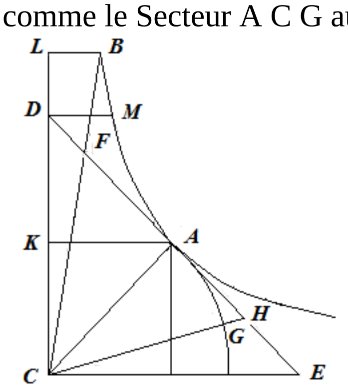
Il est à noter que, quel que soit l'angle d'elevation LMR, pourvu que la vitesse verticale demeure la mesme, on trouve icy la mesme amplitude ME. Mais il faut estre averti que ce sont seulement les figures des jets qu'on trouve de cette façon, & non pas les hauteurs & amplitudes de divers jets comparez ensemble. Car ils doivent tous estre de mesme hauteur, quand la celerité verticale est la mesme. C'est pourquoy alors chaque figure de jet , ainsi trouvée, doit estre reduite à une figure proportionale d'égale hauteur, si on veut sçavoir comment les amplitudes, & les hauteurs des divers jets, sont les unes aux autres.

J 'adjoute encore icy, que la ligne Logarithmique ne sert pas seulement à trouver les courbes des jets, mais qu'elle est cette courbe elle mesme en un cas, sçavoir quand on jette un corps obliqucment en bas, ensorte que ce qu'il y a de descente perpendiculaire, égale la vitesse Terminale. Car alors ce corps suivra precisemenc la courbure d'une telle ligne, en s'approchant tousjours de l' Asymptote, sans la pouvoir atteindre. Et ce qui determine l'espece de la ligne, c'est que sa *Soutangente*, (je nommera y ainsi la ligne F O, qui pour toutes les tangentes est la mesme) sera double de la hauteur à laquelle la vitessè Terminale peut faire monter le corps , sans resistance du milieu.

Ce sont là les choses que je trouva y en supposant la resistance estre comme la vitesse, mais toute cette Theorie estant, comme j'ay dit, fondée sur un principe, que la nature ne fuit point en ce qui est des resistances de l'air & de l'eau, je la negligeay entierement; & ce n'est qu'à l'occasion du Traité de Mr. Newton que je l'ay reprise, pour voir si ce que nous avions cherché par des voies fort differentes , s'accordoit ensemble comme il faloit. Ce qui se trouve ainsi: car la construction pour la ligne du jet, qu'il donne dans la Propos. 4 du 2 Livre, quoyque tout autre que la miene & plus difficile, produit pourtant la mesme courbe, comme cela se peut prouver par demonstration.

En examinant ce qui arrive dans la vraye hypothese de la Resistance, qui est en raison double de la Vitesse, j'a vois seulement determiné ce cas particulier, d'un corps jetté en haut avec sa vitesse Terminale; sçavoir que le temps de toute son élevation en l'air, est au temps qu'il emploierait à monter jusqu'ou il peut sans resistance, comme le Cercle au Quarré qui luy est circonscrit. Et que la hauteur du premier Jet est a la hauteur de l'autre, comme l'espace entre une Hyperbole & son Asymptote, terminé par deux paralleles à l'autre Asymptote qui soient en raison de 2 à 1 , au rectangle ou parallelogramme de la mesme Hyperbole. C'est-à-dire, comme, dans la figure suivante, l'espace AM D K au quarre A C. Je n'avois point recherche les autres cas, qui sont compris universellement dans la Prop. 9, du *2* Livre de Mr. Newton, qui est tresbelle: & ce qui m'en empêcha, ce fut que je ne trouvois point, par la voie que je suivois, la mesure des descentes des corps, si non en supposant la quadrature de certaine Ligne courbe, que je ne sçavois pas qu'elle dependoit de la quadrature de l'Hyperbole. Je reduisis la dimension de l'espace de cette courbe, à une Progression infinie, $a + \frac{1}{3} a^3 + \frac{1}{5} a^5 + \frac{1}{7} a^7 + \&c$. Ne sçachant pas que la mesme progression donnoit aussi la mesure du secteur Hyperbolique: ce que j'ay vu depuis, en comparant la demonstration de Mr. Newton avec ce que j'avois trouve.

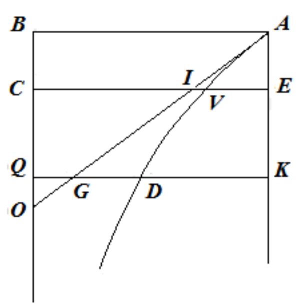
Mais par ce que cette Progression, pour la mesure de l'Hyperbole, n'a pas encore esse remarquee que je sçache , je veux expliquer icy comment elle y fert. Sou A B une Hyperbole , dont les Asymptotes DC , CE, fassent un angle droit le demi axe soit CA, perpendiculaire à D A E qui touche l'Hyberbole; & que A C B soit un Secteur, la ligne C B coupant A D en F. Si on prend maintenant A C ou A D pour l'unite, & que A F soit nommée *a*, qui est une fraction moindre que l'unité, quand AF, A D sont commensurables ;je dis que, comme la somme de la Progression infinie $a + \frac{1}{3} a^3 + \frac{1}{5} a^5 + \frac{1}{7} a^7 + \&c$. à 1, ainsi sera le Secteur A C B au triangle A C D . Ou si on mene les perpendiculaires A K, B L sur l'asymptote, on peut dire la mesme chose de l'espace A B L K , qui est egal à ce Secteur, comme on voit aisement par l'égalité des triangles C A K, C B L. De sorte que cette Progression pour l'Hyperbole, respond à celle qu'à donné Mr. Leibnits pour le Cercle par laquelle, si le Secteur du Cercle est A C G, ayant pour rayon A C, & que C G coupe AE en H; AH estant nommée *a*, & A E égale à 1 ; la somme de la Progression $a - \frac{1}{3} a^3 + \frac{1}{5} a^5 - \frac{1}{7} a^7 + \&c$ est à 1, comme le Secteur A C G au triangle A C G , ou comme l'arc AG à la droite A E.



Pour ce qui est de la ligne du jet oblique *;* s'il suffisoit, dans cette maniere de resistance , de connaître le mouvement horizontal & le vertical d'un corps , pour en composer le mouvement oblique , ainsi que dans la premiere hypothese , il y auroit moyen de determiner des points par ou cette ligne doit passer: & la mesme ligne Logarithmique y seroit utile, estant tournée en sorte que son Asymptote fust parallele à l'horizon ; & elle mesme seroit derechef la courbe du jet , dans le cas ou j'a y dit qu'elle servoit auparavant. Mais cette composition de mouvement n'ayant point lieu icy; parce que la diminution du mouvement retardé, dans la diagonale d 'un rectangle, n'est pas proportionelle aux diminutions par les costez *;* il est extremement difficile, si non du tout impossible, de resoudre ce Probleme.

Le mouvement horizontal estant consideré à part, comme d'une boule qui roulerait sur un plancher uni, à cela de remarquable icy, qu'il doit aller loin à l'infini, non-obstant la resistance du milieu, au lieu que, quand la resistance est comme la vitesse; il est borné, & n'atteint jamais un certain terme. Et cette infinité se prouve aisement par la Propos. 5. du 2 Livre du Traité de Mr. Newton, parce que l'espace compris entre l'Hyperbole & ses Asymptotes est de grandeur infinie.

Les proprietez de la ligne Logistique, que j'ay promis de raporter, & dont quelques unes ont servi à trouver ce que j'ay remarqué touchant les mouvcmens à travers l'air, sont les suivantes; outre la premiere, que j'a y desia indiquee, de la proportionatité des ordonnées à l'asymptote , quand elles sont également distantes, par laquelle on trouve des points dans cette ligne.



I . Que les espaces compris entre deux ordonnées à l'asymptote, sont entre eux comme les differences de ces ordonnees . Ainsi dans cette figure , ou A V D est la Logistique, B O son asymptote, & les ordonnées A B, V C , D Q ; dont ces dernieres, estant continuée , rencontrent A K , parallele à l'asymptote, en E, K; les espaces A B C V , A B Q D sont entre eux comme les droites EV, K D.

2. Que les mesmes choses estant posées, & A O estant la tangente au point A , laquelle coupe C E, Q K,en 1 & G; les espaces A V E, A D K sont entre eux comme les droites V I , D G.

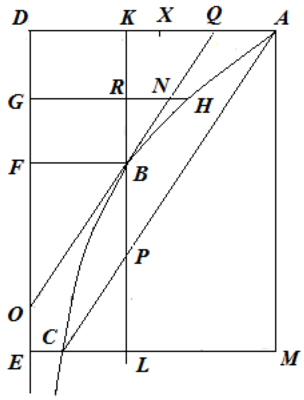
3. Que l'espace compris entre deux ordonnées, est à l'espace infini, qui, depuis la moindre de ces ordonnées , s'étend entre la Logistique & son asymptote, comme la difference des mesmes ordonnées est la moindre. Quand je dis que l'espace infini à une certaine raison à un espace fini, cela signifie qu'il aproche si prés de la grandeur d'un espace donne, qui à cette proportion à l'espace fini, que la difference peut devenir moindre qu'aucun espace donne. Dans la figure precedente l'espace A B Q D est à l'espace infini, qui depuis D Q s'etend entre la courbe & l'asymptote, comme K D à D Q.

4. Que la Soutangente, comme B O dans la mesme figure, est tousjours d'une mesme longueur, à quelque point de la Logistique la tangente apartiene.

5. Que cette longueur se trouve par approximation, & qu'elle est à la partie de l'asymptote , comprise entre les ordonnées de là raison double, comme 434294481903251804 à 301039995663981195 ; ou, bien pres , comme 13 à 9.

Huygens' : *Discours De La Cause De La Pesanteur* (p. 169 onwards) from his *Traite De La Lumiere, relating to the Logistic curve.*

6. Que s'il y a trois ordonnées , comme dans cette figure sont AD, H G , B F, & que du point de la courbe , apartenant à la moindre, on mene une parallele à l'asymptote qui coupe les deux autres ordonnées en R & K , & une tangente B Q qui les coupe en N & Q ; les espaces trilignes A B K, H B R sont entre eux, comme les parties des ordonnées entre la courbe & la tangente, sçavoir comme A Q, H N.



7. Que l'espace infini entre une ordonnée, la Logistique, & son asymptote, du costé que ces deux dernieres vont en s'approchant, est double du triangle que sont l'ordonnée, la tangente menée du mesme point que l'ordonnée, & la soutangente. Ainsi, dans la mesme figure, l'espace infini, depuis l'ordonnée B F, est double du triangle B F O.

8. Que l'espace, compris entre deux ordonnées, est égal au rectangle de la soutangente & de la diffèrence des mesmes ordonnées. Ainsi, dans la mesme figure, l'espace A D F B est égal au rectangle de la soutangente F O & de K A.

9. Que le solide que fait l'espace infini depuis une ordonnée, en tournant autour de l'asymptote, est sesquialtere du Cone, dont la hauteur est egale à la soutangente, & le demidiametre de la base égal à la mesme ordonnée. Ainsi le solide que fait l'espace infini B F O C, en tournant autour de F O, est sesquialtere du cone que fàit le triangle B F O , en tournant autour de la mesme F O.

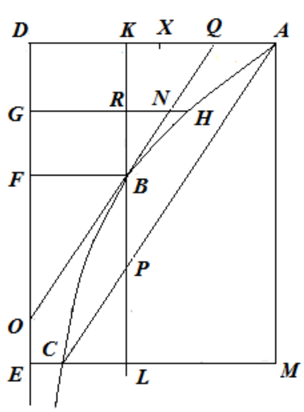
10. Que le solide produit par le mesme espace infini, en tournant autour de l'ordonnée B F, depuis laquelle il commence, est sextuple du cone que fait le triangle B F O, par sa conversion sur B F. De laquelle mesure des solides il s'ensuit;

11. Que le centre de gravité de l'espace infini, depuis une ordonnée, est distant de cette ordonnée, de la longueur de la soutangente.

12. Que ce mesme centre de gravité est distant de l'asymptote, du quart de l'ordonnée.

13. J'a vois a uni trouvé que le centre de gravité du premier des dits solides infinis, est distant de sa base, de la moitié de la soutangente.

I4. Et que le centre de gravité de l'autre solide est distant de sa base infinie, d'une huitieme de son axe.



15. On sçait assez que cette ligne Logistique sert à la Quadrature de l'Hyperbole, depuis les demonstrations du P. Greg. de St. Vincent, touchant les espaces Hyperboliques compris entre deux ordonnees sur une des Asymptotes. Et que s'il y a deux tel spaces, dont les

ordonnées de l'un soient comme A D à H G dans la derniere figure, & les ordonnées de l'autre comme B F à C E ; ces espaces seront entre eux comme les lignes D G à F E. Mais on n'a point remarque, que je sçache, que ces mesmes espaces Hypcrboliques sont au Parallelogrâme de l' Hyperbole (j'appelle ainsi le parallelogramme dont les costez sont les deux ordonnées sur les Asymptotes, tirées d'un mesme point de la Section) comme chacune des lignes D G , F E , à la soutangente F O. De sorte que , si le Parallelogramme de l'Hyperbole est supposé de 0,4342944819 parties, chaque espace Hypcrbolique , compris entre deux ordonnees à une des Asymptotes , sera à ce parallelogramme, comme le Logarithme de la proportion des mesmes ordonnées, c'est a dire comme la diffèrence des Logarithmes, des nombres qui expriment la proportion des ordonnées , au nombre 0,4342944819 ; en prenant des Logarithmes de 10 characteres outre la characteristique. Et d'icy il est aisé de verifier la Quadrature de l'Hyperbole que j'ay donnée dans le Traite de l' Evotion des Lignes Courbes, qui est dans mon *Horologium Oscillatorium.*

F 1 N.