The consideration of the paths that light rays take in passing through glass lenses, which are inclined by small amounts towards their common axis, and the phenomena that depend on them, offer very elegant results, which could have been exhausted by the work of Cotes, Euler, Lagrange, and Möbius, but which leave still more to be desired. A fundamental deficiency in the propositions put forward by those mathematicians being that the thickness of the lenses are to be ignored, whereby a degree of inaccuracy is introduced by them into the work which greatly diminishes its character and its value being contrary to nature. However, without being in agreement with many other dioptric investigations, especially for those, which take into account the so-called deviation due to the spherical shape of the lens surfaces, and which may be drawn into the calculation, the initial neglect of the thickness of the lenses becomes very useful, indeed necessary, in order to simplify and make more flexible the formulas for a rough calculation and to obtain the first approximations, whereby one would gladly make such a sacrifice for all precision to be removd, as long as it can be done without all or a significant part of the results to be lost due to the simplicity. Thus at once we encounter a lack of precision in the first definitions of dioptrics, which touches on the mathematical sense in an objectionable manner. The concepts of the axis and focal point are well-defined for any lens ; but it is not so with the focal length, which most writers explain as the distance of the focal point of the lens from its center, either by tacitly assuming from the beginning, or expressly by stating that the thickness of the lens is considered to be indefinitely small, which means that the focal lengths of real lenses maintain an uncertainty of about the order of the thickness of the lenses. Whereby this is to be undertaken more precisely, now on the one hand we may calculate that distance from the surface of the lens closest to the focal point, or otherwise from the so-called optical centre of the lens, that is, from the point that lies midway between the front and rear surfaces, and the value which may be obtained from all these determinations, may be taken as a basis to see if the image of an infinitely distant object shall be different, on comparing the [angular] magnitude with that determined by the other approach, to see whether the latter determination is indeed the only useful one.

I therefore did not consider it superfluous to devote a few pages to these basically elementary investigations, primarily to show that the thickness of the lenses can be taken into account in accordance with the elegant principles mentioned above, without losing their simplicity. Only the restriction to rays that are inclined indefinitely towards the axis should be retained here, or the deviation due to the spherical shape would have to be set aside.

1.

The position of all the points occurring in this investigation is determined by the right-angled coordinates x, y, z, assuming that the centers of the different refractive surfaces lie on the x-axis, and only those light rays are considered that make a very small angle with this axis, so that the mid-points of the refracting surfaces lie on the x-axis, and only such light rays to be considered, that make a very small angle with this axis: the coordinate x at very arbitrary starting points, are assumed to be increasing in the sense of the direction of the light rays.

We consider first the effect of a single refraction on the path of a ray of light. Let it be the refraction ratio at the transition from the first medium to the second medium, or as *n* to *n'*, arising from the refraction of the path of a single light ray. Let the refraction ratio, when passing from the first medium to the second medium be as $\frac{1}{n}$ to $\frac{1}{n'}$, or as *n'* to *n*. We denote by *M* the midpoint of the spherical separating surface between the two mediums, the same letters are also to be used to denote the values of *x* corresponding to these points, which in the following should also apply to other points of the first coordinate axis, with *N* the point of intersection of this surface with the first coordinate axis; likewise, the same letters are also to be used to denote the values of *x* corresponding to these points, which in the following should also apply to other points of the first coordinate axis. Further there shall be $r = M - N$, where *r* shall be the radius of the intersecting surface, positive or negative, according to the surface in the first medium being either concave or convex; *P* the point where the light ray meets the dividing surface and θ the (acute) angle between *MP* and the *x* axis.

[Note: Fig. 1, 2 & 3 are not present in the original exposition.]

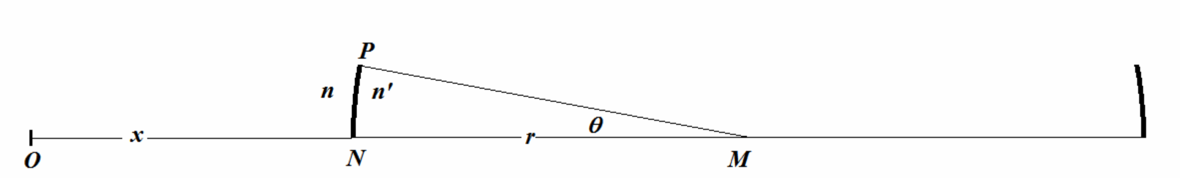

Fig. 1

The straight line [*LL*]described by a light ray before refraction is determined by two equations for a given *x*, which we give in the following form:

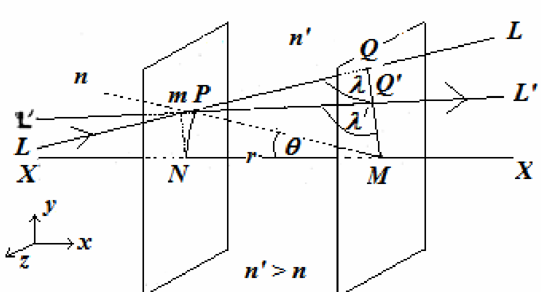

Fig. 2

$$y = \tfrac{\beta}{n}\left(x - N\right) + b$$
$$z = \tfrac{\gamma}{n}\left(x - N\right) + c,$$

[Thus, the point *P* present on the spherical surface has the coordinates (*x, b, c*), while the initial gradient of the ray in the *xy* plane is taken to be $\frac{\beta}{n}$, and that in the *xz* plane to be $\frac{\gamma}{n}$], so that the equations for the straight line described by the same light ray after refraction are:

$$y = \tfrac{\beta'}{n'}\left(x - N\right) + b'$$
$$z = \tfrac{\gamma'}{n'}\left(x - N\right) + c'$$

Thus from this arises the dependence of the four magnitudes $\beta',\ \gamma',\ b',\ c'$ on $\beta,\ \gamma,\ b,\ c$. For the point *P* thus will be given by

$$x = N + r\left(1 - cos\theta\right);$$

so that, for the first and second equations considered, we obtain

$$\tfrac{\beta}{n} \cdot r\left(1 - cos\theta\right) + b = \tfrac{\beta'}{n'} \cdot r\left(1 - cos\theta\right) + b'$$

and consequently, since $\beta,\ \beta',\ \theta$ are considered as indefinitely small magnitudes of the first order to be exact as far as to the third order

$$b' = b \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

and also

$$c' = c \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

The plane through *M* perpendicular to the *x*-axis is intersected by the initial path of the light ray at *Q*, and by the following refracted ray at *Q'* (to be extended if necessary). Since *PQ'* together with *PQ* lie in the same plane, then *M, Q, Q'* lie on a straight line [thus satisfying the physical constraint that the light ray lies in the same plane before and after refraction at the spherical surface]. If we designate the angles which *PQ, PQ'* makes with this straight line *QM* by λ, λ', it becomes clear that the products $MQ \cdot \sin\lambda,\ \ MQ' \cdot \sin\lambda'$ from the triangles *PQM* and *PQ'M* by the positive radius taken of the spherical surface by the sine of the incident angle and of the refracted angles also to be proportional to the numbers *n', n* , consequently

$$MQ' = \tfrac{n \cdot MQ \cdot sin\lambda}{n' \, sin\lambda'};$$

$$\left[\begin{array}{l} i.e. \quad \tfrac{r}{\sin\lambda} = \tfrac{QM}{\sin QPM} \quad \& \quad \tfrac{r}{\sin\lambda'} = \tfrac{Q'M}{\sin Q'PM} \text{ then} \\ MQ \cdot \sin\lambda = r \cdot \sin QPM \quad \& \quad MQ' \cdot \sin\lambda' = r \cdot \sin Q'PM; \\ \text{hence } \tfrac{MQ \cdot \sin\lambda}{MQ' \cdot \sin\lambda'} = \tfrac{\sin QPM}{\sin Q'PM} = \tfrac{n'}{n}, \text{ and } MQ' = \tfrac{n \cdot MQ \cdot \sin\lambda}{n' \cdot \sin\lambda'}. \end{array}\right]$$

Whereupon now for the point *Q* :

$$y = b + \tfrac{\beta r}{n}$$

$$z \ = c + \tfrac{\gamma r}{n}.$$

For the point *Q'* however there becomes

$$y = b' + \tfrac{\beta' r}{n'}$$

$$z \ = c' + \tfrac{\gamma' r}{n'},$$

and both the last coordinates themselves remain in the ratio *MQ'* to *MQ* to the two first two coordinates, so that we have

$$b'+\frac{\beta' r}{n'} = \frac{n \cdot \sin\lambda}{n' \sin\lambda'} \cdot \left(b+\frac{\beta r}{n}\right)$$

$$c'+\frac{\gamma' r}{n'} = \frac{n \cdot \sin\lambda}{n' \sin\lambda'} \cdot \left(c+\frac{\gamma r}{n}\right)$$

or

$$\beta' = \frac{nb+\beta r}{r} \cdot \frac{\sin\lambda}{\sin\lambda'} - \frac{n'b'}{r}$$

$$\gamma' = \frac{nc+\gamma r}{r} \cdot \frac{\sin\lambda}{\sin\lambda'} - \frac{n'c'}{r}$$

These expressions are strictly correct ; however, since the angles λ, λ' differ from a right angle only by first order magnitudes, thus their sines shall differ from unity by different second order quantities, and so to be accurate up to third order quantities,

$$\left.\begin{aligned} \beta' &= \beta - \frac{n'-n}{r} \cdot b = \beta + \frac{n'-n}{N-M} \cdot b, \\ \gamma' &= \gamma - \frac{n'-n}{r} \cdot c = \gamma + \frac{n'-n}{N-M} \cdot c. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

These equations (1), (2) hold the solution of our problem.

It must be observed, that these same formulas can be applied directly also to a reflected ray, if we substitute only $-n$ for n' , and that, with the help of such a procedure, also the entire subsequent investigation can be broadened to the case where instead of refraction one or more reflections occur.

2.

For the resolution of the general problem, to deteremine the path of the rays after some number$(\mu+1)$ of refractions, we will use the following notation .

$N^0,\ N',\ N'' \ldots\ldots N^{(\mu)}$ to be the points, where the refracting surfaces cross the *x*-axis.

$M^0,\ M',\ M'' \ldots\ldots M^{(\mu)}$ the centres of the refracting surfaces lying on this axis.

$n':n^\circ,\ n'':n',\ n''':n'' \ldots\ldots, n^{(\mu+1)}:n^{(\mu)}$ to be the refraction ratios arising in passing from the first medium $\left(\text{or } N^0\right)$ to the second medium, between $\left(N^0 \text{ and } N'\right)$, from the second to the third, and so forth. In the emanation theory of the speed of propagation of light, the numbers $n^0,\ n',\ n''$ etc. depend directly on the speeds in the individual mediums [*i.e.* in Newton's particle theory, where a greater refractive index corresponds to a greater force acting on the particles], but the speeds to be inversely proportional in the undulatory theory, and where the last medium will be the same as the first, $n^{(\mu+1)} = n^0$.

The equations for the path of the rays before the first refraction to become :

$$y = \frac{\beta^0}{n^0}\left(x - N^0\right) + b^0$$

$$z = \frac{\gamma^0}{n^0}\left(x - N^0\right) + c^0$$

The equation for the path after the first refraction:

$$y=\tfrac{\beta'}{n'}\left(x-N^0\right)+b^0$$
$$z=\tfrac{\gamma^0}{n'}\left(x-N^0\right)+c^0$$

or, instead of N^0, to be based on N' :

$$y=\tfrac{\beta'}{n'}\left(x-N'\right)+b'$$
$$z=\tfrac{\gamma'}{n'}\left(x-N'\right)+c'$$

[*i.e.* on putting $b^0+\tfrac{\beta'}{n'}\left(N'-N^0\right)=b'$ & $c^0+\tfrac{\gamma^0}{n'}\left(N'-N^0\right)=c'$.]
just as the equations for the path after the second refraction:

$$y=\tfrac{\beta''}{n''}\left(x-N'\right)+b'$$
$$z=\tfrac{\gamma''}{n''}\left(x-N'\right)+c'$$

or

$$y=\tfrac{\beta''}{n''}\left(x-N''\right)+b''$$
$$z=\tfrac{\gamma''}{n''}\left(x-N''\right)+c''$$

etc.; thus, this series of equations will continue as far as the last path, the final path of the emergent ray, which can be represented by these equations : when we reach the final term of the series $\beta,\ \gamma,\ n,\ N,\ b,\ c$, namely

$$y=\tfrac{\beta^{\mu+1}}{n^{\mu+1}}\left(x-N^{\mu}\right)+b^{\mu}$$
$$z=\tfrac{\gamma^{\mu+1}}{n^{\mu+1}}\left(x-N^{\mu}\right)+c^{\mu},$$

and, on designating $\beta^{\mu+1},\ \gamma^{\mu+1},\ n^{\mu+1},\ N^{\mu},\ b^{\mu},\ c^{\mu}$, concerning which since all have become known, by $\beta^*,\ \gamma^*,\ n^*,\ N^*,\ b^*,\ c^*$, we will have for the equations of the last path of the rays :

$$y=\tfrac{\beta^*}{n^*}\left(x-N^*\right)+b^*,$$
$$z=\tfrac{\gamma^*}{n^*}\left(x-N^*\right)+c^*.$$

Finally, we put in place as abbreviations. . . . (3),

$$\tfrac{N'-N^0}{n'}=t',\quad \tfrac{N''-N'}{n''}=t'',\quad \tfrac{N'''-N''}{n'''}=t''',\ \ldots\ldots,\quad \tfrac{N^{\mu}-N^{\mu-1}}{n^{\mu}}=t^{\mu},$$
$$\tfrac{n'-n^0}{N^0-M^0}=u^0,\quad \tfrac{n''-n'}{N'-M'}=u',\quad \tfrac{n'''-n''}{N'''-M'''}=u'',\ldots\ldots,\quad \tfrac{n^{\mu}-n^{\mu-1}}{N^{\mu}-M^{\mu}}=u^{\mu},$$

and the analogous term for the last term in this series :

$$t^{\mu} = t^*, \;\; u^{\mu} = u^*.$$

There will be accordingly, the series of the foregoing terms,

$$\begin{aligned}
\beta' &= \beta^0 + u^0 b^0 \\
b' &= b^0 + t\beta'' \\
\beta'' &= \beta' + u' b' \\
b'' &= b' + t''\beta'' \\
\beta''' &= \beta'' + u'' b'' \\
b''' &= b'' + t'''\beta'''
\end{aligned}$$

etc. , from which it becomes clear, that $b^*, \; \beta^*$ to be determined linearly through b^0 and β^0 , and so that, if we put

$$\left.\begin{aligned} b^* &= gb^0 + h\beta^0 \\ \beta^* &= kb^0 + l\beta^0 \end{aligned}\right\} \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot (4),$$

where the terms *g, h, k, l* are certain combinations of the terms depending on $u^0, \; t', \; u', \; t'', \; u'',$ etc. Now, we may adopt the symbols introduced by Euler (*Comment.Nov.Acad.Petropol. Vol. IX*) [E281]

$$\left.\begin{aligned}
g &= \left(u^0, \; t', \; u', \; t', \; u'' \ldots\ldots t^*\right) \\
h &= \left(t', \; u', \; t'', \; u'' \ldots\ldots t^*\right) \\
k &= \left(u^0, \; t', \; u', \; t'', \; u'' \ldots\ldots u^*\right) \\
l &= \left(t', \; u', \; t'', \; u'' \ldots\ldots u^*\right)
\end{aligned}\right\} \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \quad (5)$$

In order to understand the meaning of the symbolic equations in Euler's work, it is necessary to recall that Euler had designated these for some given sequence of magnitudes *a, a ', a'', a'''* etc, so that the values of some other sequence *A, A', A'', A'''* etc. will be established according to the following algorithm

$$A = a, \; A' = a'A + 1, \; A'' = a''A' + A, \; A''' = a'''A'' + A' \text{ etc.},$$

it is to be recalled that Euler designates these quantities by :

$$A = (a), \; A' = (a, \; a'), \; A'' = (a, \; a', \; a''), \;\; A''' = (a, \; a', \; a'', \; a''') \text{ etc.}$$

[It is easy to show that *A, A', A''*, etc., are the successive numerators of the remainders of the continued fraction

$$a+\cfrac{1}{a'+\cfrac{1}{a''+\ldots}};$$

where $\frac{k}{l}$ is the last remainer of

$$u^0+\cfrac{1}{t'+\cfrac{1}{u'\ldots+\cfrac{1}{t^*+\cfrac{1}{u^*}}}},$$

and where $\frac{g}{h}$ is in the second last , always of even order.]

Incidently it is self-evident, that even in the equation for the third coordinate *z* the constant for the last path can be deduced from those for the first whole path, as in the equations for *y*, or that one will have

$$\left.\begin{aligned} c^* &= gc^0+h\gamma^0 \\ \gamma^* &= kc^0+l\gamma^0 \end{aligned}\right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot (4)$$

The complete solution of our problem is contained in the equations (3), (5), (4) .

3.

Euler had developed in the place cited, the most outstanding relations concerning the algorithm mentioned, of which only two need be brought to mind here.

In the first place, there will be always

$$\left(a,\ a',\ a''\ldots a^{(\lambda)}\right)\left(a',\ a''\ldots a^{(\lambda+1)}\right)-\left(a,\ a',\ a''\ldots a^{(\lambda+1)}\right)\left(a',\ a''\ldots a^{(\lambda)}\right)=\pm 1$$

where the upper or lower sign holds, as long as all the elements $a,\ a',\ a''\ldots a^{(\lambda+1)}$, that is the plus sign shall be used if λ shall be odd, and the minus sign if λ shall be even.

Secondly the inversion of the order of the elements is allowed ; namely so that there becomes

$$\left(a,\ a',\ a''\ldots a^{(\lambda)}\right)=\left(a^{(\lambda)},\ldots\ a'',a',\ a\right)$$

From the use of this first proposition for the magnitudes *g, h, k, l* it follows:

$$gl-hk=1.$$

The known equations (4) thus also can be shown, on restoring
$b^*,\ \beta^*,\ c^*,\ \gamma^*$ from $b^0,\ \beta^0,\ c^0,\ \gamma^0$:

$$b^0 = lb^* - h\beta^*$$

$$\beta^0 = -kb^* + g\beta^*$$

$$c^0 = lc^* - h\gamma^*$$

$$\gamma^0 = -kc^* + g\gamma^*$$

[Rather than using Euler's approach for the successive multiplication of ratios using the continued fraction algorithm, in modern terms these expressions can be expressed by column vectors and the associated transition matrix, as the two approaches are related:

$$\begin{pmatrix} b^0 \\ \beta^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l & -h \\ -k & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^* \\ \beta^* \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} c^0 \\ \gamma^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l & -h \\ -k & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^* \\ \gamma^* \end{pmatrix},$$

for which the determinant $\begin{vmatrix} l & -h \\ -k & g \end{vmatrix} = 1$, following at once from the relevant equations. See e.g. A. J. van der Poorten: An Introduction to Continued Fractions.] ; However, the procedure adopted by Gauss is to be followed here

4.

P shall be a given point on the line straight line (elongated if need be), which represents the path of the incident ray, and $\xi,\ \eta,\ \zeta$ shall be the coordinates of *P*. Thus there becomes

$$n^0\eta = \beta^0\left(\xi - N^0\right) + n^0 b^0$$

or if we substitue for $\beta^0,\ b^0$ their final values $\beta^*,\ b^*$, there will become :

$$n^0\eta = \left(g\beta^* - kb^*\right)\left(\xi - N^0\right) - n^0\left(h\beta^* - lb^*\right)$$

consequently,

$$b^* = \frac{n^0\eta + \left(n^0 h - g\left(\xi - N^0\right)\right)\beta^*}{n^0 l - k\left(\xi - N^0\right)}.$$

If one substitutes these values into the first equation for the path of the ray after the last refraction, namely into

$$y = \tfrac{\beta^*}{n^*}\left(x - N^*\right) + b^*$$

and writes as an abbreviation

$$N^* - \frac{n^0 h - g\left(\xi - N^0\right)}{n^0 l - k\left(\xi - N^0\right)} \cdot n^* = \xi^*$$

$$\frac{n^0\eta}{n^0 l - k\left(\xi - N^0\right)} = \eta^* \;;$$

thus the above equation will become

$$y = \eta * + \frac{\beta *}{n *}\left(x - \xi *\right)$$

and finally by the same method, if further we write

$$\frac{n^0 \xi}{n^0 l - k\left(\xi - N^0\right)} = \xi *,$$

then the second equation for the path of the rays for the final refraction

$$z = \zeta * + \frac{\gamma *}{n *}\left(x - \xi *\right).$$

The point $P*$, the coordinates of which are $\xi *$, $\eta *$, $\zeta *$, therefore lies on the straight line (if necessary elongated backwards), which represents the path of the emergent ray, and as it is clear at once, since the coordinates of β^0, b^0, γ^0, c^0 are independent, that the same is true for all the relevant rays, which pass through the point *P*. Hence we can treat the point *P* as the object and $P *$ as its image ; but the former can only be real, if *P* lies in the first medium, or $\xi - N^0$ is negative, and just as then the image can only be real, if $P*$ lies in the last medium, or $\xi * - N *$ is positive ; in the other cases either the object or the image shall be virtual.

The points *P*, $P*$ lie in one plane with the *x* axis, at distances from the same, so that the relation $\frac{n^0}{n^0 l - k\left(\xi - N^0\right)}$ maintains a one to one correspondence between the numbers, and so that the positive or negative signs of these numbers indicate the position of each point from the same or opposite sides of the axis. A system of points at the same *x* position at right angles to the *x*-axis can be viewed as a composite object, the composite image of which also lies on one side in a vertical plane perpendicular to the axis of the *x*, and resembles the object, so that the linear relationship of ratio of the parts will be expressed by the number

$$\frac{n^0}{n^0 l - k\left(\xi - N^0\right)} = g + \frac{k}{n *}\left(\xi * - N *\right),$$

the sign of which distinguishes the upright from the inverted image.

5.

What has been developed so far contains the whole theory of the changes which the path of the light rays undergoes through refractions, and easily allows it to be extended to the case where the refractions are associated with one or more reflections, which, however, is not to be carried out specifically here. However, it is not superfluous to change the results into another form by referring them to two other points *Q*, $Q*$ instead of the first and last surfaces with the points N^0, $N *$. the equations for the first ray becomes

$$y = \frac{\beta^0}{n^0}\left(x-Q\right)+B$$

$$z = \frac{\gamma^0}{n^0}\left(x-Q\right)+C$$

and for the last path of the ray:

$$y = \frac{\beta^*}{n^*}\left(x-Q^*\right)+B^*$$

$$z = \frac{\gamma^*}{n^*}\left(x-Q^*\right)+C^*,$$

and we put

$$\frac{N^0-Q}{n^0}=\theta, \quad \frac{Q^*-N^*}{n^*}=\theta^*.$$

Thus we have

$$b^0 = B+\theta\beta^0, \qquad c^0 = C+\theta\gamma^0$$

$$B^* = b^* + \theta^*\beta^*, \quad C^* = c^* + \theta^*\gamma^*$$

Hence, associated with the equations (4) it follows readily, that, if we put :

$$G = g+\theta^* k$$

$$H = h+\theta g+\theta\theta^* k+\theta^* l$$

$$K = k$$

$$L = l+\theta k,$$

there shall become :

$$B^* = GB+H\beta^0, \quad C^* = GC+H\gamma^0$$

$$\beta^* = KB+L\beta^0, \quad \gamma^* = KC+L\gamma^0$$

The coefficients *G, H, K, L*, which replace *g, h, k, l* in this way also give the equation

$$\mathrm{GL}-\mathrm{HK}=1.$$

6.

The purpose of introducing other points to relate the position of the incoming and outgoing beams proceeding there, is to provide a simpler dependency of the latter on the former, and preferably two pairs of points that begin with *E*, and end with *E** and *F, F** should be provided similarly, which also denote the abscissas of these points. The values of the magnitudes in question can be given readily in tabular form.

	I	II
θ	$\frac{1-l}{k}$	$\frac{-l}{k}$
θ^*	$\frac{1-g}{k}$	$-\frac{g}{k}$
Q	$E = N^0 - \frac{n^0(1-l)}{k}$	$F = N^0+\frac{n^0 l}{k} = E+\frac{n^0}{k}$
Q^*	$E^* = N^* + \frac{n^*(1-g)}{k}$	$F^* = N^* - \frac{n^* g}{k} = E^* - \frac{n^*}{k}$

G	1	0
H	1	$-\frac{1}{k}$
K	k	k
L	1	0

The outcome is thus, that if the equations for the incident beam can be brought into this form

$$y = \frac{\beta^0}{n^0}(x-E)+B$$
$$z = \frac{\gamma^0}{n^0}(x-E)+C$$

or into the following form (where we distinguish the constant part from the first part by an accent) :

$$y = \frac{\beta^0}{n^0}(x-F)+B'$$
$$z = \frac{\gamma^0}{n^0}(x-F)+C',$$

where the equations for the outgoing beam will become:

$$y = \frac{\beta^0+kB}{n^*}(x-E^*)+B$$
$$z = \frac{\gamma^0+kC}{n^*}(x-E^*)+C$$

or

$$y = \frac{kB'}{n^*}(x-F^*)-\frac{\beta^0}{k}$$
$$z = \frac{kC'}{n^*}(x-F^*)-\frac{\gamma^0}{k}$$

7.

By using the points E, E^*, the dependency of the final path of the light beam on the first path can be expressed simply as follows: the final path has the same position with respect to the point E^* as a light beam that was only refracted once would have for E, if at E there were a refractive surface with the radius $\frac{n^0-n^*}{k}$, through which the light beam passed directly from the first to the last medium.

The above applies to the case where the first and the last mediums are different. If, on the other hand, they are the same, or $n^* = n^0$, as in the case of refraction through one or more glass lens, the last path from E^* has the same position that it would have from E by the refraction through an infinitely thin lens located in E of focal length $-\frac{n^0}{k}$. This applies to the case, where the first and the last medium are different. On the other hand, if they shall be equal, or $n^* = n^0$, as for the refraction through one or more glass lenses, so that the path through the last lens towards E^* has the same position by virtue of a refraction through an infinitely thin lens located at E of focal length $-\frac{n^0}{k}$. In other words, it is understood instead of the transition from the first to the last medium, with several refractions, it is possible to substitute the transition either by a single refraction or by a single lens of infinitely small thickness, depending on whether the first and the last mediums are the same or different, in the first case by using the radius $\frac{n^0-n^*}{k}$ of the refractive surface, and in the second case the focal length $-\frac{n^0}{k}$ of the lens gives the refracting surface of the lens at *E*, and in both cases the position of the outgoing beam shifts as much as the distance of the point *E** from *E*. Incidentally, the sign of the radius of the refractive surface is to be understood as in Art.1 above, and the sign of the focal length as will be noted below in Art. 9 .

Because of the importance of the points *E, E**, these seem to deserve a special name: I will call these the principal points of the system of mediums, either of the lens, or of the system of lenses to which they refer; *E* the principal point of the first kind, *E** the principal point of the second kind. The planes of the principal points will be understood to mean the planes that are normal to the axes of the *x* plane.

8.

Regarding the points *F, F**, the formulas of Article 6 show that all incident light rays that pass through point *F* correspond to refracted rays which are parallel to the axis; incident rays in the opposite sense, which intersect at the point *F* * , are refracted parallel to the axis ; so that for these rays coming from the opposite side, these points interchange their functions. Thus, if we give a greater extension to the language used for individual lenses, *F, F** can be called the focal points of the system of the refracting mediums or lenses to which they refer, *F* the first, *F* * the second; the latter may be called the focal planes by these points normal to the axis of the *x* planes. Those formulas of Art. 6 also show that all rays that intersect at any other point on the first focal plane correspond to outgoing ones that are inclined towards the axis but parallel to each other, and vice versa, but not to all incident rays parallel to the axis correspond among themselves to those extending that intersect at points other than *F** on the second focal plane.

9.

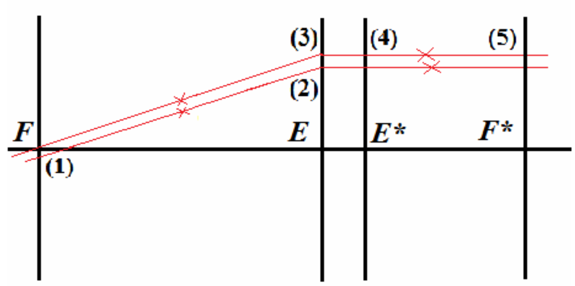

Fig. 3.

With the help of these four planes [Fig. 3, not drawn in the original text; the rays interchanging *F* and *F** have not been drawn], we arrive at a very simple construction for the position of the outgoing rays. The incident beam intersects the first focal plane at the point (1), and the first principal plane *E* at the point (2); a ray parallel to the ray (1)(2) drawn through the focus *F* meets the first principal plane in (3); a ray parallel with the axis through (2) meets the second principal plane in (4); finally a ray parallel with the axis through (3) meets the second focal plane in (5). Then (4) (5) or (5) (4) gives the position of the outgoing beam. It is namely the values of the coordinates of these points:

for	*x*	*y*	*z*
(1)	F	B'	C'
(2)	E	B	C
F	F	0	0
(3)	E	$B - B'$	$c—c$
(4)	E^*	B	C
(5)	F^*	$B - B'$	$C—C'$

It follows from the formulas of Art. 6 that the outgoing beam passes through (4) and (5); the former immediately, the other because

$$B - B' = \frac{\beta^0}{n^0}(E - F) = -\frac{\beta^0}{k}$$
$$C - C' = \frac{\gamma^0}{n^0}(E - F) = -\frac{\gamma^0}{k}$$

In the most common case, where $n^* = n^0$, thus $F^* - E^* = E - F$, the construction becomes simpler, as the point (3) will be superfluous ; one needs only to use (1), (2), (4) as defined earlier, and to consider (4)(5) to be parallel to (1)(2).

The direction of the incoming rays goes through *E*, so that the direction of the outgoing rays always goes through *E**, and in that case, where $n^* = n^0$, is to be equally parallel. Such a beam is usually called the main beam (for simple lenses).

The distances of the second focal plane from the second principal plane, and of the first principal plane from the plane of the first focal plane, or the magnitudes $-\frac{n^*}{k}$, $-\frac{n^0}{k}$, could be called the focal lengths of the system of mediums, if it did not seem more appropriate to limit the use of this term to the case, where the last medium is the same as the first, that is, those distances between them are the same.

In order to remain conforming to common usage, we consider the focal length to be positive if the first principal point corresponds to a larger coordinate than the first focal point, so that the focal length is always expressed by $-\frac{n^*}{k} = -\frac{n^0}{k}$.

10.

In the formulas given above for the place of the image in Sect. 4, as you can easily see, instead of setting *N, N ** other points, it is possible to set the corresponding *G, H, K, L* substituted instead of *g, h, k, l* at the same time. By choosing the principal points, we obtain the following expressions :

$$\xi^* = E^* - \frac{n^*(E-\xi)}{n^0 + k(E-\xi)}$$

$$\eta^* = \frac{n^0\eta}{n^0 + k(E-\xi)}$$

$$\zeta^* = \frac{n^0\zeta}{n^0 + k(E-\xi)}$$

The first formula can also be given the following form $\frac{n^*}{\xi^*-E^*} + \frac{n^0}{E-\xi} = -k$.
If we choose the focal point, thus we obtain

$$\xi^* = F^* + \frac{n^0 n^*}{kk(F-\xi)}$$

$$\eta^* = \frac{n^0\eta}{k(F-\xi)}$$

$$\zeta^* = \frac{n^0\zeta}{k(F-\xi)}$$

Because of their frequent use, the formulas shall still appear here in the form they assume if the first and the last medium are the same, and the focal length is denoted by φ.

$$\frac{1}{\xi^*-E^*} + \frac{1}{\xi-E} = \frac{1}{\varphi}$$

$$(\xi^* - F^*)(F - \xi) = \varphi\varphi$$

$$\eta^* = -\frac{\varphi\eta}{F-\xi} = -\frac{\eta(\xi^*-F^*)}{\varphi}$$

$$\zeta^* = -\frac{\varphi\zeta}{F-\xi} = -\frac{\zeta(\xi^*-F^*)}{\varphi}$$

11.

The four auxiliary points E, E^*, F, F^* lose their applicability in the special case where $k = 0$, that is, those points should be considered as infinitely distant from the refracting surfaces. In this case, one can directly adhere to the general formulas treated above to solve the main problems, which here take the following form. If the equations for the incident rays may be treated thus :

$$y = \frac{\beta^0}{n^0}\left(x - N^0\right) + b^0$$

$$z = \frac{\gamma^0}{n^0}\left(x - N^0\right) + c^0$$

thus they shall become for the outgoing rays :

$$y = \frac{l\beta^0}{n^0}(x - N^*) + gb^0 + h\beta^0$$

$$z = \frac{l\gamma^0}{n^*}(x - N^*) + gc^0 + h\gamma^0$$

We put as an abbreviation :

$$N* - \frac{hn*}{l} = N**$$

or, which is the same, as $gl = 1$,

$$N* - ghn* = N**$$

thus these formulas appear easier, namely:

$$y = \frac{l\beta^0}{n*}(x - N**) + gb^0$$
$$z = \frac{l\gamma^0}{n*}(x - N**) + gc^0$$

For the positions of these images, the coordinates of which shall be $\xi,\ \eta,\ \zeta$, we obtain the coordinates :

$$\xi* = N* - ghn* - \frac{n*}{n^0} gg(N - \xi)$$
$$= N** - \frac{n*}{n^0} gg(N^0 - \xi)$$
$$\eta* = g\eta$$
$$\zeta* = g\zeta$$

It is evident from this that the point of the *x*-axis is *N* **, which represents the image of the point *N* in accordance with the type of designation we always use, and that the linear ratio of the parts of a composite image to the object is constant, namely as *g* to 1 or as 1 to *l*.

12.

The case considered in the previous article occurs in the situation of the telescope, and in for glasses to correct a farsighted eye and for the precise viewing of infinitely distant objects. It is evident from the above formulas that the direction of the outgoing beam depends only on the direction of the incoming one, that is to say parallel rays together incident correspond also to parallel outgoing beams, and that the tangent of the inclination of the first towards the axis becomes the tangent of the inclination of the latter and behaves as in the ratio1 to *l*. So the number $l = \frac{1}{g}$ is what is called the magnification of the telescope, and its positive or negative sign indicates an upright or inverted image. If you let the incident and outgoing rays swap their functions by using the objectives on the ocular side as the ocular lens, they appear reduced in the same proportions, and this is the basis for the equally convenient and precise method of determining the magnification of a telescope, which I have described in volume 2 of the 1823 *Astronomical News*.

Another method of determining the magnification is based on the comparison of an object with its image according to the linear relationship. Ramsden's dynameter is nothing more than a device for measuring the diameter of the image of the circular boundary of the object falling in *N***, whereby one must of course first make sure that this image really appears and is not produced by internal glare. The image must also be a real one, for which it is necessary that *ghn** becomes negative: with a Galilean telescope, where this image is only a virtual one, an accurate result could only be obtained with a micrometric microscope, which in all cases, where you want a greater sharpness that would deserve preference. Incidentally, it is evident from the previous article that a pertinent distance of the object from the objective can be used just as long as the distance does not become so large that the image ceases to be a real one or one that can be obtained with a microscope. Finally, it may be noted that point *N* ** is the one that is named in the theory of telescopes for the designated location of the eye.

13.

In order to apply the general provisions of article 2 to the case of a simple glass lens, we denote the refraction ratio when changing from air to glass $n:1$; the radius of the first and second surface by $(n-1)\,f$ and $(n-1)\,f'$; the thickness of the lens with *ne*. So we have instead of the names:

$$\begin{array}{ll} n^0 & \text{here } 1 \\ n' & \ldots\ldots n \\ n'' & \ldots\ldots 1 \\ t' & \ldots\ldots e \\ u^0 & \ldots\ldots -\frac{1}{f} \\ u' & \ldots\ldots -\frac{1}{f'} \end{array}$$

and consequently,

$$g = 1+u^0t' = \frac{f-e}{f}$$
$$h = t' = e$$
$$k = 1+u't'+t'u^0u' = -\frac{f+f'-e}{ff'}$$
$$l = 1+u't' = \frac{f'-e}{f'}.$$

For the focal length φ we have here thus by Art. 9

$$\varphi = \frac{ff'}{f+f'-e}$$

for here with the two main points *E, E'* to be designated according to Art. 6

$$E = N^0 + \frac{ef}{f+f'-e} = N^0 + \frac{e\phi}{f'}$$
$$E' = N' - \frac{ef'}{f+f'-e} = N' - \frac{e\phi}{f}$$

and for both the focal points *F, F'*

$$F = E - \varphi = N^0 - \frac{f(f'-e)}{f+f'-e}$$

$$F' = E + \varphi = N' + \frac{f'(f-e)}{f+f'-e}.$$

For it is easy to find the point of intersection of the straight line which describes the main beam inside the lens with the axis (if necessary extended forwards or backwards) :

$$x = N^0 + \frac{nef}{f+f'} = N' - \frac{nef'}{f+f'}.$$

This point, which is independent of the inclination of the main beam, is what some writers call the optical center of the lens, a distinction that this point, which otherwise has no strange properties, hardly deserves, and which has occasionally led to error, and seems as if the simple relations between image and object, which take place with an infinitely thin lens, could only be transferred to a lens of finite thickness by a relationship to that center, while this transfer, as shown above, is valid only if the object is related to the first principal point, the image to the second principal point.
In the case of a system of several lenses, for example already discussed in the case of an achromatic double objective, there can be no question of a center in that sense. If you wanted to keep this designation, I would consider it more appropriate to attach it to the point that lies halfway between the two principal points (and therefore also between the two focal points) and so that it coincides with that point only if the lens is equilateral. This point has the practical useful property of being easily and precisely identifiable by turning the lens over; because it is evidently this point which, when the lens is turned over, must take up the previous location if the position of the image is to remain unchanged with respect to a fixed object.
Further, it may be noted here, the distance between the two principal points will become

$$E' - E = ne - \frac{e(f+f')}{f+f'-e} = \left[\frac{nef+nef'-e^2-ef-ef'}{f+f'-e} = \frac{(n-1)(f+f')}{f+f'-e}e - \frac{e^2}{f+f'-e}\right]$$
$$\doteq (n-1)e - \frac{ee}{f+f'-e}$$

and that, so insofar as e is usually very small in comparison with $f+f'$, this interval differs very little from $(n-1)e$, that is to say, to differ very little from the thickness of the lens by $\frac{n-1}{n}$.

14.

In the place of the general formulas of Art. 2, by which the path of the outgoing ray is determined from the path of the incident ray, in the case of a system of lenses linked together on a common axis, one simplies the general formulas so that instead of the radius of the individual refractive surfaces and their mutual distances, more conveniently one can establish the paths from the focal lengths of the individual lenses and from the distances of their second principal points from the first of the following lenses.

The new formulas are very similar to those of Art. 2, but contain only half as many elements. Since their derivation from the previous ones is very easy, it will be sufficient to put them in a ready-to-use form.

We designate the focal lengths of the individual successive lenses by $\varphi°$, φ', φ'' etc., their principal points here deviating from the previous designation, the first lens by $E°$, E', E'' etc, the second lens $I°$, I', I'' etc. As an abbreviation we write

$$-\tfrac{1}{\varphi^0}=u^0,\ -\tfrac{1}{\varphi'}=u',\ -\tfrac{1}{\varphi''}=u'',\ \text{etc.}$$
$$E'-I^0=t',\ E''-I'=t'',\ E'''-I''=t''',\ \text{etc.}$$

the last terms in these rows to be indicated by drawing an asterisk.

Now we put the equations for the incident rays in the form

$$y=\beta^0\left(x-E^0\right)+b^0$$
$$z=\gamma^0\left(x-E^0\right)+c^0$$

for the outgoing, however, in the following

$$y=\beta*\left(x-I*\right)+b*$$
$$z=\gamma*\left(x-I*\right)+c*$$

Thus, if the four quantities *g, h, k, l* are determined by formulas that are completely identical to those described in the second article as in (5),

$$b*=gb^0+h\beta^0,\ c*=gc^0+h\gamma^0$$
$$\beta*=kb^0+l\beta^0,\ \gamma*=kc^0+l\gamma^0$$

For the two principal points of the lens system, considered as a whole, there becomes

$$\text{for the first } x=E^0-\tfrac{1-l}{k},$$
$$\text{for the second } x=I*+\tfrac{1-g}{k}$$

Further for the two focal points of the system of lenses

$$\text{for the first } x=E^0+\tfrac{l}{k}$$
$$\text{for the second } x=I*-\tfrac{g}{k}$$
$$\text{the focal length itself is } =-\tfrac{1}{k}$$

The formula for the case, where the system consists of two lenses only, still requires to be written in a special manner. We have namely,

$$g = \frac{\varphi^0 - t'}{\varphi^0}$$

$$h = -\frac{1}{\varphi^0}$$

$$k = -\frac{\varphi^0 + \varphi' - t'}{\varphi\varphi'}$$

$$l = \frac{\varphi' - t'}{\varphi'}$$

The values of x for the two principal points are

$$E^0 + \frac{t'\varphi^0}{\varphi^0 + \varphi' - t'} \quad \text{and} \quad I' - \frac{t'\varphi'}{\varphi^0 + \varphi' - t'}$$

and the focal length

$$= \frac{\varphi^0\varphi'}{\varphi^0 + \varphi' - t}.$$

It can be seen that these formulas are quite analogous to those given in Article 13 for the determination of the principal points and the focal length of a simple lens, by replacing these here f^0, f', e with the quantities φ^0, φ' , t' .

The distance between the two main points is, in the case of two lenses,

$$= I' - E^0 - \frac{t'\left(\varphi^0 + \varphi'\right)}{\varphi^0 + \varphi' - t'}$$

$$= I^0 - E^0 + I' - E' - \frac{tt'}{\varphi^0 + \varphi' - t'}.$$

If the interval t' is very small, as is always the case with achromatic double lenses made from two contiguous lenses, the last term t'^2 becomes insignificant, and therefore the distance between the two main points for such a double lens as a whole is very close to the sum of the values for those, no matter what that distance between the lenses shall be, taken individually.

Incidentally, it is self-evident that all the formulas listed in the current article can be transferred without any change to the case where, instead of simple lenses, partial systems of lenses are to be combined to form a whole system.

15.

The appearence of the images, viewed both through a simple lens and through a system of several on a common axis, as we have shown, depend on three elements, which are determined by the refraction ratio (or by the refraction ratios if they are different for the different lenses), and the positions and radius of the refractive surfaces : however, since these quantities are usually not immediately known, there is still a need for something to say about the method by which these three elements can be derived from observed phenomena. We hereby denote the various points arising from the axis in question in the following way :

ξ an object ; ξ' its image ; *F* the first focal point, *F'* the second focal point ; *E* the first principal point, *E'* the second principal point ; finally *D* a point fixed to the lens (or lens system). As always, the same letters denote the coordinates of these points in each situation investigated. Further we put the focal length $= f$, and the distance of the points *D* from the foci, $D - F = p$, $F' - D' = q$. The three magnitudes f, p, q can be considered as the elements of the lens , and three trials will always be necessary to find them, by measuring the distances of the object and its image from the lens to the distance *D*, with the point *D* in three different positions, which procedure we want to perform first to resolve the problem quite generally.

The values of $D - \xi$ and $\xi' - D$ are in an experiment *a, b*; in a second trial a', b' ; in a third trial *a'', b''*. The general equation

$$(F - \xi)(\xi' - F') = ff$$

therefore gives us

$$(a - p)(b - q) = ff$$
$$(a' - p)(b' - q) = ff$$
$$(a'' - p)(b'' - q) = ff$$

from which it will be easily found by elimination

$$p = a - \frac{(a'-a)(a''-a)(b'-b'')}{R}$$
$$q = b - \frac{(b'-b)(b-b'')(a''-a)}{R}$$
$$ff = \frac{(a'-a)(a''-a)(a''-a')(b-b')(b-b'')(b'-b'')}{RR}$$

where there is written for abbreviation :

$$(a'' - a)(b - b') - (a' - a)(b - b'') = R\,;$$

R may also be put into the following form

$$R = (a'' - a')(b - b') - (a' - a)(b' - b'')$$
$$= (a'' - a')(b - b'') - (a'' - a)(b' - b'');$$

just as p and q may be expressed thus in the following form :

$$p = a' - \frac{(a'-a)(a''-a')(b-b'')}{R}$$
$$= a'' - \frac{(a''-a)(a''-a')(b-b')}{R}$$
$$q = b' - \frac{(b-b')(b'-b'')(a''-a)}{R}$$
$$= b'' - \frac{(b-b'')(b'-b'')(a'-a)}{R}.$$

16.

A few remarks still need to be added to the general solution given in the previous article.

I. It is assumed that in the three experiments the object always lies on one and the same side of the lens. If one finds it expedient to use the lens in the wrong position in one of the experiments, one can think of it as if the image of the object and the object were the image, which leads this case back to the previous one

II. For these trials considered individually, the formula for ff leaves it unspecified whether f is to be taken positive or negative: this indicates at once whether the image is erect or inverted, and that in the first case $\xi' - F'$ and f will have opposite signs , and in the second case the same sign is required. Also, it should not go unnoticed that, despite the generality of the analytical resolution, the practical applicability is limited to the case of real images (*i.e.* for individual lenses to have positive focal lengths), unless special aids are employed for determining the positions of virtual images.

III. Since the performance of the trials only allows a certain limited degree of precision always, it is by no means irrelevant for the reliability of the results which combinations are chosen. In general, it can be said as a rule that three attempts, two of which are made under slightly different circumstances, cannot determine all three elements precisely.

17.

In a simple lens, as well as in one such lens made from two or more lenses placed close together (as in achromatic lenses of the usual construction), the two principal points are placed at a smaller distance from each other. If we were to consider this distance $E' - E = \lambda$ as a known quantity, thus two trials would be sufficient,

$$F' - F = p + q = 2f + \lambda.$$

to take the place of the three trials. If one connects the other two equations with the same

$$(a-p)(b-q) = ff$$
$$(a'-p)(b'-q) = ff$$

after the elimination of p and q, one obtains the equation for determining f:

$$\frac{a'+b'-a-b}{(a'-a)(b'-b)} \cdot ff + 2(a+b+a'+b'-2\lambda)f - (a+b'-\lambda)(a'+b-\lambda) = 0.$$

This quadratic equation turns into a linear one if $a' + b' - a - b = 0$ *i.e.* if the two experiments are arranged so that the distance of the image from the object remains the same in both cases, while the relative position of the lens has been changed.
It is this distance $= c$, thus $a = c - b$, $a' = c - b'$; whereby there becomes :

$$4(c-\lambda) f = (c-\lambda+b'-b)(c-\lambda-b'+b)$$

or

$$f = \tfrac{1}{4}(c-\lambda) - \tfrac{(b'-b)^2}{4(c-\lambda)}.$$

For every prescribed value of c the equation must be used

$$F - \xi + \tfrac{ff}{F-\xi} = F - \xi + \xi' - F' = c - 2f - \lambda$$

Sufficient to supply the equation, with its two roots:

$$F - \xi = \tfrac{1}{2}(c - 2f - \lambda) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(c-4f-\lambda)(c-\lambda)}$$
$$F - \xi = \tfrac{1}{2}(c - 2f - \lambda) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(c-4f-\lambda)(c-\lambda)}$$

which are real and unequal if c is larger than $4f+\lambda$, so that for the first object ξ there are always two different positions of the lens in which the image coincides with the point $\xi+c$. The product of these two values of $F-\xi$, *i.e.* $(a-p)(a'-p)$ will become $= ff$ where, at the same time, evidently from it, there becomes
$a' - p = b - q$ and $b' - q = a - p$, consequently

$$p = \tfrac{1}{2}(2f + c + \lambda - b - b')$$
$$q = \tfrac{1}{2}(2f - c + \lambda + b + b')$$
$$E = D + \tfrac{1}{2}(b + b' - c) - \tfrac{1}{2}\lambda$$
$$E' = D + \tfrac{1}{2}(b + b' - c) + \tfrac{1}{2}\lambda$$

18.

At that position of the lens where there is $F - \xi = f$, or $\xi' - \xi = 4f + \lambda$, the image is at the smallest distance from the object viewed; the image moves away from that place as soon as the lens is moved to one side or the other from that position, but obviously at first very slowly. It follows from this that if a value $4f+\lambda$ exceeding the size only a little is chosen for c, the attempts at averaging of the two required positions of the lens or the values of b and b' allow only a comparatively indistinct image. It follows from that, that if for c the value chosen is only slightly greater in size, the attempts to determine the two required positions of the lens or the values of b and b' only permit a comparatively low sharpness of the image. This uncertainty becomes greatest for the determination of E and

E', so the use of the method in such circumstances is not well suited for this purpose. It is different, however, if it is only a matter of determining the focal length f, where the sharpness loses nothing due to that circumstance, because only the square of $b'-b$ occurs in the expression for f. In this case, the practice of the method is all the more convenient because, apart from the distance c, only the magnitude of the displacement of the lens $b'-b$ need be measured, that is, the absolute values of b and b' are unnecessary.

19.

If we ignore the thickness λ, so that on putting

$$f=\tfrac{1}{4}c-\tfrac{(b'-b)^2}{4c}, \text{ [in place of } f=\tfrac{1}{4}(c-\lambda)-\tfrac{(b'-b)^2}{4(c-\lambda)}.\text{]}$$

the method described thus corresponds to that which Bessel proposed in the 17th volume of the *Astronomical News* and applied it to the determination of the focal length of the objective of the Königsberg heliometer.

The strict formula shows that if λ is neglected, the focal length is found to be greater than the true value by the amount $\tfrac{1}{4}\lambda+\tfrac{\lambda(b'-b)^2}{4c(c-\lambda)}$, where the second part can be regarded as imperceptible under the circumstances mentioned. In order to obtain a result that is appropriate to the precision that the method itself provides, the consideration of λ therefore remains essentially necessary: only it is difficult to obtain an exact knowledge of these quantities. For a simple lens, it will be sufficient to calculate the approximate value given for λ given above in Art. 13, then from above the measured thickness of the same and the makeshift known refraction ratio for λ. Even for an achromatic double lens, at most, if you can get a precise knowledge of the thickness of each individual part, you may want to use the above Art. 14 approximate values. In order to get at least an idea of the influence that the neglect of λ can have, we want, for example, to consider an objective where the thickness of the crown glass lens is 7 lines [a line is taken usually to be $\frac{1}{12}^{\text{th}}$ of an inch], the thickness of the flint glass lens is 3 lines, and the refraction ratio for the former at 1.528, for the other at 1.618. This makes the distance between the two principal points approximately

for the crown glass lens	2,42
for the flint glass	1,15
and for the compound lens	3,57 lines,

so the focal length obtained, on ignoring λ, will then be too large by as much as 0.89 lines. Thus, for a focal length 8 feet, which is that of our objective lens, the error may be shown to be around $\frac{1}{1300}$ of the absolute value out the whole.

20.

If we cannot use the determination method of λ given in the previous article, or we are not satisfied with it, the following seems to be the most expedient way to find λ by direct experiments.

Determine the position of the image of a very distant object (as best you can on the axis of the lens) relative to the fixed point *D* on the lens. Insofar as the distance of the object can be regarded as infinitely great, this image lies at $F' - D$ and gives the measured distance *q* immediately. Repeat the experiment by inverting the lens, where the image falls in *F*, and its distance will give the value of *p* from *D*.

For the third experiment we bring the object (on the side of *F*) as near as possible to the lens, determine the distance of the image from this object $= \xi - \xi'$, and at the same time the distance $D - \xi = a''$, and put the distance of the image ξ' from *D* to be $\xi' - D = \xi' - \xi - a'' = b''$. Consequently we have

$$p - a'' = \xi - F, \quad q - b'' = F' - \xi',$$

$$(p - a'')(q - b'') = ff \text{ or}$$

$$\lambda = p + q - 2\sqrt{(p - a'')(q - b'')}$$

If the measurements were carried out in all three experiments with maximum precision, then all three elements *p, q, f* alone are sufficiently well determined, and no other is required. However, if one wishes to obtain *f* with an even greater precision, one only has to consider those attempts as a preparation for the method of Article 18, which gives the value of λ. In order to see more clearly the moments from which the sharpness mainly depends in the determination of λ thus obtained, we set the above formula for λ in the following form

$$\lambda = a'' + b'' + \frac{\left(p - a'' - \sqrt{(p - a'')(q - b'')}\right)^2}{p - a''}.$$

and consider, that $p - a'' - \sqrt{(p - a'')(q - b'')}$ on the other hand, $p - a''$ presents the distance of that object from the first focus. It is evident from this that under the prevailing circumstances, only the latter part of the formula for λ becomes very small, and that its calculated value is affected by the small inaccuracies in the values $p,\ q,\ a'',\ b''$ only by a small amount, that is, the precision of the determination of λ mainly depends on the precision of the measurement $\xi' - \xi = a'' + b''$.

21.

In relation to the procedure given in the previous article, a couple of comments deserve a place here.

I. To carry out the third trial, in the case when the image is virtual, the means which are otherwise applicable are not sufficient: the following method combines convenience and precision. A circular line is described on a flat surface, larger or slightly larger than the protruding edge of the frame of the glass, and the center of this circle is identified by two small cross lines. The glass is placed on the surface with the frame in such a way that it is concentric with the one with the circular line ; then a microscope placed on a fixed tripod and provided with crosshairs, placed vertically above it, and shifted in its sleeve until the image of the cross line coincides exactly with the crosshairs ; finally the glass lens is removed and the microscope is brought closer to the plane by moving it in the sleeve until the image of the crossed lines again coincides with the crosshairs of the microscope. The size of the last shift, which can easily be measured in some way, is the distance of the object (the cross line) from its image produced by the glass lens $=\xi'-\xi$. The point of the axis of the lens, which lies in the plane touching the projecting edge of the frame, can be assumed to be the fixed point *D* itself, in which case $a''=0$, $b''=\xi'-\xi$, or if another point *D* were chosen, this may be compared with that distance acting through the medium itself to find a'' .

II. If the distance of the object used for the first and second trials for finding the focal length is indeed large, but not large enough to be able to consider its image as completely coincident with the focus, then a reduction is necessary, which can be obtained by looking at the square of the focal length divided by the distance of the object, and this reduction must be subtracted from the distances of the image from point *D* in order to obtain the quantities *q* and *p* exactly: apparently only a roughly approximate knowledge of the focal length and the distance is necessary, insofar the latter is very large. For the first trial, let *a* be the value of $D-\xi$, *a* being a value much greater than the focal length, *b* the value of $\xi'-D$ for the second trial (where the lens is used in the inverted position, and *b* again is a very great length differing little from $F'-D$) and denote the distances by b' and by a'. In this way (that amounts to one specified in Art. 16, I) we achieve the advantage that the equations taking place for the three experiments

$$(a-p)\quad(b-q)=ff$$
$$(b'-q)\ (a'-p)=ff$$
$$(a''-p)(b''-q)=ff$$

are the same as those from which we started in Art. 15, and therefore the formulas derived from them remain valid. If the second trial were carried out in such a way that the location of the image in the space were the same as in the first attempt (where a small displacement of the lens parallel to its axis provides the image of a very distant object with a motion which sensibly is the same as that of the lens itself), so that $a+b=b'+a'$ what sizes we denote by *c*, and the formulas of Art. 15 get some simplification.

It becomes, from the second formula for *p* and the first for *q*,

$$p=a'-\frac{(a'-a'')(b-b'')}{c-a''-b''}$$
$$q=b-\frac{(a'-a'')(b-b'')}{c-a''-b''}.$$

III. Even if one does not use the procedure of Art. 20 for the complete determination of the refracting elements, but wants to reserve the most accurate determination of the focal length of the method of Art. 17, that one remains the most suitable to determine the position of the two principal points. It will be namely :

$$E = D + \tfrac{1}{2}(q - p) - \tfrac{1}{2}\lambda = D + \tfrac{1}{2}(b - a') - \tfrac{1}{2}\lambda$$
$$E' = D + \tfrac{1}{2}(q - p) + \tfrac{1}{2}\lambda = D + \tfrac{1}{2}(b - a') + \tfrac{1}{2}\lambda.$$

22.

For a simple lens and, generally speaking, also for a system of lenses, one can attach a certain value to the focal length and certain positions for the principal points and focal points only insofar as is necessary for light rays of a certain refractibility; for rays of different refractability, these points have different locations and the focal lengths have different values, and the non-homogeneous light of objects therefore suffers from a scattering of colors when passing through such lenses.

By combining two or more lenses from different types of glass this scattering of colors can be eliminated: for the perfection of an achromatic objective, however, it will be necessary for parallel rays to unite in one point regardless of the color, and not just those that are parallel to the axis, but also those that are inclined towards the axis , or in other words, the differently colored images of an extended object considered to be infinitely distant do not only have to fall into one plane, but also have the same size. The first condition is based on the identity of the second focal point for differently colored rays, the second on the equality of the focal lengths, and since this is the distance of the second focal point from the second principal point, one can also express the two conditions by the fact that both points must be the same for red and violet rays at the same time. If the first condition alone is fulfilled, the rays inclined against the axis do not produce a pure image; a very slight inequality of the focal lengths for rays of different colors is always considered to be completely harmless.

In the theory of achromatic objectives, only the first condition is considered. In the ordinary construction of these objectives alone, where the two lenses are either in contact or at an extremely short distance from one another, the location of the main points is so little affected by the unequal refraction of the light rays that the second condition is fulfilled by itself, if not exactly, but so close that a noticeable imperfection cannot arise from it: even if one pays attention, the thickness of the lenses can be calculated in such a way that an exact identity of the second principal point for unequal rays takes place.

However it behaves differently when the convex crown glass lens is separated from the concave flint glass lens by a considerable distance. It can easily be shown that with such determinations for this distance and the focal lengths of the individual lenses, where the second focal point of this lens system remains the same for rays of different colors, the focal length of this system for the violet rays is necessarily longer than for the red ones, and so on the difference is of the same order as that which (in the opposite sense) takes place with simple lenses. The same also applies if (as happens with the so-called dialytic telescopes), instead of the second lens, a composition of a flint glass lens and a crown glass lens, either in contact or at very short distances from one another, is assumed. It is always impossible in this way to produce a perfectly pure picture of an extended object, in that the violet picture, if it is to be at the same distance from the lens system as the red one, is necessarily larger than the latter.

However, it cannot be inferred from this that the telescope constructed from this last device must remain less perfect in relation to achromatism than the telescope with achromatic lenses constructed in the usual way, and producing a completely color-pure image. On the contrary, it can be said that those with a well-calculated arrangement of the eyepieces are able to give the eye the more pure picture.

In fact, a perfectly pure image produced by the objective (may it be a real or virtual one) may not appear perfectly pure to the eye because of the scattering of colors produced by the ocular glasses; Although the so-called colored band is prevented by a special arrangement of the oculars, it cannot cancel out the length deviation, which is exacerbated by the fact that the human eye itself is not achromatic. The only effect is that the last pictures, red and violet, in an apparent size, but not that they appear at the same distance or at the same time clearly.

In fact, a perfectly pure image produced by the objective (be it a real or virtual one) may not appear perfectly pure to the eye because of the scattering of colors produced by the ocular glasses; Although the so-called colored band is prevented by a special arrangement of the oculars, it cannot cancel out the length deviation, which is exacerbated by the fact that the human eye itself is not achromatic. The only effect is that the last pictures, red and violet, in an apparent size, but not that they appear at the same distance or at the same time clearly.

So it is clear that in the eye a completely color-pure picture to produce, the first image must have a certain length deviation depending on the conditions of the oculars and the non-achromatism of the human eye. In theory, however, an objective can now also be calculated from ordinary equipment in such a way that a prescribed length deviation takes place; apart from the difficulty of complying with all the sharpness required to represent such very small differences in the technical implementation, this length deviation would only ever be suitable for a certain ocular. In the dialytic device, on the other hand, the fact that the double lens forming the second part of the objective can be moved relative to the first means that the length deviation required for each ocular can be obtained, while the ocular can be set up so that the colored border is obedient becomes. Incidentally, I must confine myself to this brief hint and reserve a more detailed development of this interesting object on another occasion.

Dioptrische Untersuchungen
von
C.F. Gauss

Die Betrachtung des Weges, welchen durch Linsenglaser solche Lichtstrahlen nehmen, die gegen die gemeinschaftliche Axe derselben sehr wenig geneigt sind, und der davon abhangenden Erscheinungen, bietet sehr elegante Resultate dar, welche durch die Arbeiten von Cotes, Euler, Lagrange und Möbius erschöpft scheinen konnten, aber doch noch mehreres zu wünschen übrig lassen. Ein wesentlicher Mangel der von jenen Mathematikern aufgestellten Sätze ist, dafs dabei die Dicke der Linsen vernachlässigt wird, wo durch ihnen ein ihren Werth sehr verringernder Charakter von Ungenauigkeit und Naturwidrigkeit aufgeprägt wird. Ohne in Abrede zu stellen, dafs für manche andere dioptrische Untersuchungen, namentlich für diejenigen, wobei die sogenannte Abweichung wegen der Kugelgestalt der Linsenflächen in Betracht gezogen wird, die anfängliche Vernachlässigung der Dicke der Linsen sehr nützlich, ja nothwendig wird, um einfachere und geschmeidigere Vorschriften für Überschlage und erste Annäherungen zu gewinnen, wird man sich doch gern einer solchen Aufopferung aller Schärfe da enthoben sehen wo es ohne allen oder ohne erheblichen Verlust für die Einfachheit der Resultate geschehen kann. Auf einen den mathematischen Sinn unangenehm berührenden Mangel an Präcision stofsen wir zum Theil schon bei den ersten Begriffsbestimmungen der Dioptrik. Die Begriffe von Axe und Brennpunkt einer Linse stehen zwar mit Schärfe fest ; allein nicht so ist es mit der Brennweite, welche die meisten Schriftsteller als die Entfernung des Brennpunkts der Linse von ihrem Mittelpunkte erklären, indem sie von vorne her entweder stillschweigend voraussetzen, oder ausdrücklich bevorworten, dafs die Dicke der Linse hierbei wie unendlich klein betrachtet werde, wodurch also für wirk liche Linsen die Brennweite eine Unbestimmtheit von der Ordnung der Dicke der Linsen behalt. Wo es einmahl genauer genommen wird, rechnet man jene Entfernung bald von der dem Brennpunkte nachsten Oberfläche der Linse, bald von dem sogenannten optischen Mittelpunkte derselben, bald von demjenigen Punkte, welcher zwischen der Vorderfläche und Hinterfläche mitten inne liegt, und von allen diesen Bestimmungen wieder verschieden ist derjenige Werth, welcher bei der Vergleichung der Gröfse des Bildes eines unendlich entfernten Gegenstandes mit der scheinbaren Gröfse des letztem zum Grunde gelegt werden mufs, welche letztere Bestimmung in der That die einzige zweckmassige ist.

Ich habe daher für nicht Überflussig gehalten, diesen an sich ganz elementaren Untersuchungen einige Blätter zu widmen, vornehmlich um zu zeigen, dafs bei den oben erwahnten eleganten Sätzen ohne Verlust für ihre Einfachheit die Dicke der Linsen mit berücksichtigt werden kann. Nur die Beschränkung auf solche Strahlen, die gegen die Axe unendlich wenig geneigt sind, soll hier beibehalten, oder die Abweichung wegen der Kugelgestalt bei Seite gesetzt werden.

1.

Die Bestimmung der Lage aller in dieser Untersuchung vorkommenden Punkte geschieht durch rechtwinklige Coordinaten x, y, z, wobei vorausgesetzt wird, dafs die Mittelpunkte der verschiedenen Brechungsflächen in der Axe der x liegen, und nur solche Lichtstrahlen betrachtet werden, die mit dieser Axe einen sehr kleinen Winkel machen :

die Coordinaten x werden, bei ganz willkürlichem Anfängspunkte, als wachsend angenommen in dem Sinne der Richtung der Lichtstrahlen.

Wir betrachten zuerst die Wirkung Einer Brechung auf den Weg eines Lichtstrahls. Es sei das Brechungsverhältnifs beim Übergange aus dem ersten Mittel in das zweite wie $\frac{1}{n}$ zu $\frac{1}{n'}$, oder wie n' zu n. Wir bezeichnen mit M den Mittelpunkt der spharischen Scheidungsfläche zwischen den beiden Mitteln, mit N den Durchschnittspunkt dieser Fläche mit der ersten Coordinatenaxe ; zugleich sollen mit denselben Buchstaben auch die diesen Punkten entsprechenden Werthe von x bezeichnet werden, was in der Folge auch bei andern Punkten der ersten Coordinatenaxe eben so gehalten werden soll. Es sei ferner $r = M - N$, oder r der Halbmesser der Scheidungsfläche, positiv oder negativ, je nachdem das erste Mittel an der convexen oder an der concaven Seite liegt ; P der Punkt, wo der Lichtstrahl die Scheidungsfläche trifft, und θ oder (spitze) Winkel zwischen MP und der Axe der x.

Die von einem Lichtstrahle vor der Brechung beschriebene gerade Linie wird durch zwei Gleichungen bestimmt, denen wir folgende Form geben :

$$y = \frac{\beta}{n}\left(x - N\right) + b$$
$$z = \frac{\gamma}{n}\left(x - N\right) + c$$

und eben so seien die Gleichungen für die von demselben Lichtstrahle nach der Brechung beschriebene gerade Linie

$$y = \frac{\beta'}{n'}\left(x - N\right) + b'$$
$$z = \frac{\gamma'}{n'}\left(x - N\right) + c'$$

Es kommt also darauf an, die Abhängigkeit der vier Gröfsen $\beta',\ \gamma',\ b',\ c'$ von $\beta,\ \gamma,\ b,\ c$ zu entwickeln. Für den Punkt P wird

$$x = N + r\left(1 - cos\theta\right)$$

also, weil für denselben sowohl die ersten als die zweiten Gleichungen gelten,

$$\frac{\beta}{n} \cdot r\left(1 - cos\theta\right) + b = \frac{\beta'}{n'} \cdot r\left(1 - cos\theta\right) + b'$$

und folglich, da $\beta,\ \beta',\ \theta$ als unendlich kleine Gröfsen erster Ordnung gelten, bis auf Gröfsen dritter Ordnung genau

$$b' = b \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

und eben so

$$c' = c \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

Eine durch M senkrecht gegen die Axe der x gelegte Ebene werde von dem ersten (nöthigenfalls verlängerten) Wege des Lichtstrahls in Q, von dem zweiten in Q' geschnitten. Da PQ' mit PQ und PM in Einer Ebene liegt, so sind M, Q, Q' in Einer geraden Linie. Bezeichnet man mit λ, λ' die Winkel, welche diese gerade Linie mit PQ, *PQ '* macht, so werden offenbar $MQ \cdot sin\lambda$, $MQ' \cdot sin\lambda'$ den Producten aus dem positiv genommenen Halb messer der Kugelfläche in die Sinus des Einfallswinkels und des gebrochenen Winkels gleich, also den Zahlen *n', n* proportional sein, mithin

$$MQ' = \frac{n \cdot MQ \cdot sin\lambda}{n' \, sin\lambda'}$$

Da nun für den Punkt *Q*

$$y = b + \frac{\beta r}{n}$$
$$z = c + \frac{\gamma r}{n}$$

für den Punkt Q' hingegen

$$y = b' + \frac{\beta' r}{n'}$$
$$z = c' + \frac{\gamma' r}{n'}$$

wird, und die beiden letztem Coordinalen sich zu den beiden erstem wie *MQ '* zu *MQ* verhalten, so hat man

$$b' + \frac{\beta' r}{n'} = \frac{n \cdot sin\lambda}{n' \, sin\lambda'} \cdot \left(b + \frac{\beta r}{n}\right)$$
$$c' + \frac{\gamma' r}{n'} = \frac{n \cdot sin\lambda}{n' \, sin\lambda'} \cdot \left(c + \frac{\gamma r}{n}\right)$$

oder

$$\beta' = \frac{nb + \beta r}{r} \cdot \frac{sin\lambda}{sin\lambda'} - \frac{n'b'}{r}$$

Diese Ausdrücke sind strenge richtig ; allein, da λ, λ' vom rechten Winkel um Gröfsen erster Ordnung, also ihre Sinus von der Einheit um Gröfsen zweiter Ordnung verschieden sind, so wird, auf Gröfsen dritter Ordnung genau,

$$\left.\begin{aligned} \beta' &= \beta - \frac{n'-n}{r} \cdot b = \beta + \frac{n'-n}{N-M} \cdot b \\ \gamma &= \gamma - \frac{n'-n}{r} \cdot c = \gamma + \frac{n'-n}{N-M} \cdot c \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Diese Gleichungen (1), (2) enthalten die Auflösung unserer Aufgabe.

Es verdient bemerkt zu werden, dafs dieselben Formeln auch unmittelbar auf einen zurückgeworfenen Strahl angewandt werden konnen, wenn man nur - *n* für *n'* substituirt, und dafs, mit Hülfe eines solchen Verfahrens, auch die sammtlichen folgenden Untersuchungen sich sehr leicht auf den Fall erweitern lassen, wo anstatt der Refractionen eine oder mehrere Reflexionen eintreten.

2.

Zur Auflösung der allgemeinem Aufgabe, den Weg des Lichtstrahls nach wiederhohlten $(\mu+1)$ Brechungen zu bestimmen, wollen wir folgende Bezeichnungen gebrauchen.

$N^0,\ N',\ N'' \ldots . N^{(\mu)}$ die Punkte, wo die Axe der x von den Brechungsflächen getroffen wird.

$M^0,\ M',\ M'' \ldots . M^{(\mu)}$ die in dieser Axe liegenden Mittelpunkte der Brechungsflächen.

$n' : n°,\ n'' : n',\ n''' : n'' \ldots . ,\ n^{(\mu+1)} : n^{(\mu)}$ die Brechungsverhältnisse beim Durchgange aus dem ersten Mittel (vor N^0) in das zweite $\left(\text{zwischen } N^0 \text{ und } N'\right)$ aus dem zweiten in das dritte u.s.f.. In der Emanationstheorie sind also die Zahlen $n^0,\ n',\ n''$ u.s.w. den Geschwindigkeiten der Fortpflanzung des Lichts in den einzelnen Mitteln direct, in der Undulationstheorie verkehrt proportional, und wenn das letzte Mittel dasselbe ist, wie das erste, wird $n^{(\mu+1)} = n°$.

Die Gleichungen für den Weg des Lichtstrahls vor der ersten Brechung seien

$$y = \tfrac{\beta^0}{n^0}\left(x - N^0\right) + b^0$$
$$z = \tfrac{\gamma^0}{\gamma^0}\left(x - N^0\right) + c^0$$

die Gleichungen für den Weg nach der ersten Brechung folgende

$$y = \tfrac{\beta'}{n'}\left(x - N^0\right) + b^0$$
$$z = \tfrac{\gamma^0}{n'}\left(x - N^0\right) + c^0$$

oder, anstatt auf N^0, auf N' bezogen

$$y = \tfrac{\beta'}{n'}\left(x - N'\right) + b'$$
$$z = \tfrac{\gamma'}{n'}\left(x - N'\right) + c'$$

eben so die Gleichungen für den Weg nach der zweiten Brechung

$$y = \tfrac{\beta''}{n''}\left(x - N'\right) + b'$$
$$z = \tfrac{\gamma''}{n''}\left(x - N'\right) + c'$$

oder

$$y = \tfrac{\beta''}{n''}\left(x - N''\right) + b''$$
$$z = \tfrac{\gamma''}{n''}\left(x - N''\right) + c'$$

u.s.f., also, wenn wir die letzten Glieder in den Reihen der $\beta,\ \gamma,\ n,\ N,\ b,\ c$, nemlich $\beta^{(\mu+1)},\ \gamma^{(\mu+1)},\ n^{(\mu+1)},\ N^{(\mu+1)},\ b^{(\mu+1)},\ c^{(\mu+1)}$, um sie als solche kenntlich zu machen, durch $\beta*,\ \gamma*,\ n*,\ N*,\ b*,\ c*$ bezeichnen, die Gleichungen für den letzten Weg des Lichtstrahls

$$y = \frac{\beta^*}{n^*}\left(x - N^*\right) + b^*$$
$$z = \frac{\gamma^*}{n^*}\left(x - N^*\right) + c^*$$

Endlich setzen wir zur Abkurzung. . . . (3)

$$\frac{N' - N^0}{n'} = t', \quad \frac{N'' - N'}{n''} = t'', \quad \frac{N''' - N''}{n'''} = t''', \text{ u.s.f.}$$
$$\frac{n' - n^0}{N^0 - M^0} = u^0, \quad \frac{n'' - n'}{N' - M'} = u', \quad \frac{n''' - n''}{N''' - M'''} = u'', \text{ u.s.f.}$$

und der Analogie nach für die letzten Glieder in diesen Reihen

$$t^{(\mu)} = t^*, \quad u^{(\mu)} = u^*$$

Es wird demnach, in Folge des vorhergehenden Artikels,

$$\beta' = \beta^0 + u^0 b^0$$
$$b' = b^0 + t\beta''$$
$$\beta'' = \beta' + u'b'$$
$$b'' = b' + t''\beta''$$
$$\beta''' = \beta'' + u''b''$$
$$b''' = b'' + t'''\beta'''$$

u. s. f., woraus erhellet, dafs b^*, β^* linearisch durch b^0 und β^0 bestimmt werden, und dass, wenn man

$$\left.\begin{array}{l} b^* = gb^0 + h\beta^0 \\ \beta^* = kb^0 + l\beta^0 \end{array}\right\} . \quad . \quad . \quad . (4)$$

setzt, in der von Euler eingeführten
Bezeichnung sein wird

$$\left.\begin{array}{l} g = \left(u^0,\ t',\ u',\ t',\ u'' ..... t^*\right) \\ h = \left(t',\ u',\ t'',\ u'' ..... t^*\right) \\ k = \left(u^0,\ t',\ u',\ t'',\ u'' ..... u^*\right) \\ l = \left(t',\ u',\ t'',\ u'' ..... u^*\right) \end{array}\right\} . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Die Bedeutung dieser Bezeichnung besteht bekanntlich darin, dafs, wenn aus einer gegebenen Reihe von Gröfsen a, a', a'', a'' u. s. f. eine andere Reihe, A, A', A'', A''' u. s. f. nach folgendem Algorithmus gebildet wird

$$A = a,\ A' = a'A{+}1,\ A'' = a''A'{+}A,\ A''' = A'' + A' \text{ u. s. f,}$$

man schreibt

$$A = (a),\ A' = (a,\ a'),\ A'' = (a,\ a',\ a''),\ \ A''' = (a,\ a',\ a'',\ a''') \text{ u. s. f.}$$

Übrigens ist von selbst klär, dafs in den Gleichungen für die dritte Coordinate z die Constanten für den letzten Weg aus denen für den ersten ganz eben so abgeleitet werden, wie in den Gleichungen für y, oder dafs man haben wird

$$\left.\begin{array}{l} c^* = gc^0 + h\gamma^0 \\ \gamma^* = kc^0 + l\gamma^0 \end{array}\right\} \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot (4)$$

In den Gleichungen (3), (5), (4) ist die vollstandige Auflösung unsrer Aufgabe enthalten.

3.

Euler hat a. a. O. die vornehmsten den erwähnten Algorithmus betreffenden Relationen entwickelt, von denen hier nur zwei in Erinnerung gebracht werden mogen.

Erstlich ist immer

$$\left(a,\ a',\ a''...a^{(\lambda)}\right)\left(a',\ a''...a^{(\lambda+1)}\right) - \left(a,\ a',\ a''...a^{(\lambda+1)}\right)\left(a',\ a''...a^{(\lambda)}\right) = \pm 1$$

wo das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem die Anzahl aller Elemente $a,\ a',\ a''...a^{(\lambda+1)}$ d. i. die Zahl $\lambda{+}2$ ungerade oder gerade ist.

Zweitens ist erlaubt, die Ordnung der Elemente umzukehren ; es wird nemlich

$$\left(a,\ a',\ a''...a^{(\lambda)}\right) = \left(a^{(\lambda)}, ...\ a'', a',\ a\right)$$

Aus der Anwendung des ersten dieser Sätze auf die Gröfsen *g, h, k, l* folgt

$$gl - hk = 1$$

Die Gleichungen (4) konnen daher auch so dargestellt werden :

$$\begin{array}{l} b^0 = lb^* - h\beta^* \\ \beta^0 = -kb^* + g\beta^* \\ c^0 = lc^* - h\gamma^* \\ \gamma^0 = -\ kc^* + g\gamma^* \end{array}$$

4.

Es sei *P* ein gegebener Punkt auf der (nötigenfalls verlängerten) geraden Linie, welche der erste Weg des Lichtstrahls darstellt, und $\xi,\ \eta,\ \zeta$ seine Coordinaten. Es ist also

$$n^0\eta = \beta^0\left(\xi - N^0\right) + n^0b^0$$

oder wenn man für β^0, b^0 die am Schlufs des vorhergehenden Artikels gegebenen Ausdrücke substituirt

$$n^0\eta = (g\beta^* - kb^*)\left(\xi - N^0\right) - n^0\left(h\beta^* - lb^*\right)$$

folglich

$$b^* = \frac{n^0\eta + \left(n^0 h - g\left(\xi - N^0\right)\right)\beta^*}{n^0 l - k\left(\xi - N^0\right)}$$

Substituirt man diesen Werth in der ersten Gleichung für den Weg des Lichtstrahls nach der letzten Brechung, nemlich in

$$y = \frac{\zeta^*}{n^*}\left(x - N^*\right) + b^*$$

und schreibt um abzukurzen

$$N^* - \frac{n^0 h - g\left(\xi - N^0\right)}{n^0 l - k\left(\xi - N^0\right)} \cdot n^* = \xi^*$$

$$\frac{n^0\eta}{n^0 l - k\left(\xi - N^0\right)} = \eta^*$$

so wird diese Gleichung

$$y = \eta^* + \frac{\beta^*}{n^*}\left(x - \xi^*\right)$$

und ganz auf dieselbe Art wird, wenn man noch

$$\frac{n^0\xi}{n^0 l - k\left(\xi - N^0\right)} = \beta^*$$

schreibt, die zweite Gleichung für den Weg des Lichtstrahls nach der letzten Brechung

$$z = \zeta^* + \frac{\gamma^*}{n^*}\left(x - \xi^*\right)$$

Der Punkt P^*, dessen Coordinaten ξ^*, η^*, ζ^* sind, liegt also auf der (nöthigenfalls rückwarts verlängerten) geraden Linie, welche dieser letzte Weg darstellt, und zugleich ist klär, da seine Coordinaten von β^0, b^0, γ^0, c^0 unabhängig sind, dafs er für alle einfallenden Strahlen, die durch P gehen, derselbe ist. Man kann den Punkt P wie ein Object und P^* als sein Bild betrachten ; jenes kann aber nur dann ein reelles sein, wenn P im ersten Mittel liegt, oder $\xi - N^0$ negativ ist, und eben so ist das Bild nur dann ein reelles, wenn P^* in dem letzten Mittel liegt, oder $\xi^* - N^*$ positiv ist ; in den entgegengesetzten Fallen sind Object oder Bild nur virtuell.

Die Punkte P, P^* liegen mit der Axe der x in Einer Ebene, in Entfernungen von derselben, die sich wie die Einheit und die Zahl $\frac{n^0}{n^0 l - k\left(\xi - N^0\right)}$ verhalten, wobei das positive oder negative Zeichen dieser Zahl die Lage jener Punkte auf Einer Seite der Axe oder auf entgegengesetzten anzeigt. Ein System von Punkten in derselben gegen die Axe der x

senkrechten Ebene kann wie ein zusammengesetztes Object betrachtet werden, dessen zusammen gesetztes Bild gleichfalls in Eine gegen die Axe der x senkrechte Ebene Fällt, und dem Object ähnlich ist, so dafs das Linearverhältnifs der Theile durch die Zahl $\frac{n^0}{n^0 l - k(\xi - N^0)} = g + \frac{k}{n^*}(\xi^* - N^*)$ ausgedrückt wird, deren Zeichen die aufrechte oder verkehrte Lage unterscheidet.

5.

Das bisher entwickelte enthält die ganze Theorie der Veränderungen, welche der Weg der Lichtstrahlen durch Brechungen erleidet, und läfst sich leicht auch auf den Fall ausdehnen, wo mit Brechungen eine oder mehrere Reflexionen verbunden sind, was jedoch speciell hier nicht ausgeführt werden soll. Es ist aber nicht überflüssig, die Resultate in eine andere Form zu bringen, indem man sie, anstatt auf die erste und letzte Fläche oder auf die Punkte N^0, N^* auf zwei andere Punkte Q, Q^* bezieht. Es seien

$$y = \frac{\beta^0}{n^0}(x - Q) + B$$
$$z = \frac{\gamma^0}{n^0}(x - Q) + C$$

die Gleichungen Für den ersten, und

$$y = \frac{\beta^*}{n^*}(x - Q^*) + B^*$$
$$z = \frac{\gamma^*}{n^*}(x - Q^*) + C^*$$

die Gleichungen für den letzten Weg des Lichtstrahls, und man setzt

$$\frac{N^0 - Q}{n^0} = \theta, \quad \frac{Q^* - N^*}{n^*} = \theta^*,$$

Wir haben also

$$b^0 = B + \theta\beta^0, \qquad c^0 = C + \theta\gamma^0$$
$$B^* = b^* + \theta^*\beta^*, \quad C^* = c^* + \theta^*\gamma^*$$

Hieraus, verbunden mit den Gleichungen (4) folgt leicht, dafs, wenn man

$$G = g + \theta^* k$$
$$H = h + \theta g + \theta\theta^* k + \theta^* l$$
$$K = k$$
$$L = l + \theta k$$

setzt,

$$B^* = GB + H\beta^0,\ C^* = GC + H\gamma^0$$

$$\beta^* = KB + L\beta^0,\ y^* = KC + L\gamma^0$$

sein wird. Die Coefficienten *G, H, K, L*, welche auf diese Weise an die Stelle von *g, h, k, l* treten, geben auch die Gleichung

$$\mathrm{GL} - \mathrm{HK} = 1.$$

6.

Der Zweck der Einführung anderer Punkte, um die Lage des einfallenden und des ausfahrenden Strahls darauf zu beziehen, geht dahin, eine einfachere Abhängigkeit der letztem von der erstem darzubieten, und dazu sind vorzugsweise zwei Paare von Punkten geeignet, die mit *E, E** und *F, F** bezeichnet werden sollen. Die Werthe der dabei in Betracht kommenden Grössen werden sich bequem in einer tabellarischen Form übersehen lassen.

	I	II
θ	$\frac{1-l}{k}$	$\frac{-l}{k}$
θ^*	$\frac{1-g}{k}$	$\frac{1-g}{k}$
Q	$E = N^0 - \frac{n^0(1-l)}{k}$	$F = N^0 + \frac{n^0 l}{k} = E + \frac{n^0}{k}$
Q^*	$E^* = N^* + \frac{n^*(1-g)}{k}$	$F^* = N^* - \frac{n^* g}{k} = E^* - \frac{n^*}{k}$
G	1	0
H	1	$-\frac{1}{k}$
K	k	k
L	*1*	*0*

Das Resultat ist also, dass, wenn die Gleichungen für den einfallenden Strahl in die Form gebracht werden

$$y = \frac{\beta^0}{n^0}\left(x - E\right) + B$$

$$z = \frac{\gamma^0}{n^0}\left(x - E\right) + C$$

oder in folgende (wo wir die constanten Theile zur Unterscheidung von der ersten Form mit Accenten bezeichnen)

$$y = \frac{\beta^0}{n^0}\left(x - F\right) + B'$$
$$z = \frac{\gamma^0}{n^0}\left(x - F\right) + C'$$

die Gleichungen für den ausfahrenden Strahl sein werden

$$y = \frac{\beta^0 + kB}{n^*}\left(x - E^*\right) + B$$
$$z = \frac{\gamma^0 + kC}{n^*}\left(x - E^*\right) + C$$

oder

$$y = \frac{kB'}{n^*}\left(x - F^*\right) - \frac{\beta^0}{k}$$
$$z = \frac{kC'}{n^*}\left(x - F^*\right) - \frac{\gamma^0}{k}$$

7.

Durch Benutzung der Punkte *E, E** läfst sich die Abhängigkeit des letzten Weges des Lichtstrahls von dem ersten einfach so ausdrücken : der letzte Weg hat gegen den Punkt *E** dieselbe Lage, welche der nur einmahl gebrochene Lichtstrahl gegen *E* haben wurde, wenn in *E* sich eine brechende Fläche mit dem Halbmesser $\frac{n^0 - n^*}{k}$ befande, durch welche der Lichtstrahl aus dem ersten Mittel unmittelbar in das letzte Mittel überginge. Dies gilt für den Fall, wo das erste und das letzte Mittel ungleich sind. Sind sie hingegen gleich, oder $n^* = n^0$, wie bei Brechung durch ein oder mehrere Linsengläser, so hat der letzte Weg gegen *E** dieselbe Lage, welche er gegen *E* vermöge der Brechung durch eine in *E* befindliche unendlich dünne Linse von der Brennweite $-\frac{n^0}{k}$ haben wurde. Mit andern Worten : es ist verstattet, anstatt des Überganges aus dem ersten Mittel in das letzte vermoge mehrerer Brechungen, den Übergang entweder durch eine einzige Brechung, oder durch eine einzige Linse von unendlich kleiner Dicke zu substituiren, je nachdem das erste und das letzte Mittel ungleich oder gleich sind, indem man im ersten Fall der brechenden Fläche den Halbmesser $\frac{n^0 - n^*}{k}$, im zweiten der Linse die Brennweite $-\frac{n^0}{k}$ gibt, die brechende Fläche oder die Linse in *E* annimmt, und in beiden Fällen die Lage des ausfahrenden Strahls so viel verschiebt, als die Entfernung des Punktes E* von E beträgt. Das Zeichen des Halbmessers der brechenden Fläche ist übrigens so zu verstehen, wie oben Art. 1, und das Zeichen der Brennweite so, wie weiter unten Art. 9 bemerkt werden wird.

Wegen dieser Bedeutsamkeit der Punkte *E, E** scheinen diese eine besondere Benennung wohl zu verdienen : ich werde sie die Hauptpunkte des Systems von Mitteln, oder der Linse, oder des Systems von Linsen, worauf sie sich beziehen, nennen ; *E* den ersten, *E** den zweiten Hauptpunkt. Unter Ebenen der Hauptpunkte werden die durch dieselben normal gegen die Axe der *x* gelegten Ebenen verstanden werden.

8.

Rücksichtlich der Punkte *F, F** zeigen die Formeln des 6 Artikels, dafs allen einfallenden Lichtstrahlen, die durch den Punkt *F* gehen, ausfahrende entsprechen, die mit der Axe parallel sind ; einfallenden hingegen, die
mit der Axe parallel sind, solche ausfahrende, die sich in dem Punkte F* kreuzen ; für Strahlen, die von der entgegengesetzten Seite herkommen, vertauschen diese Punkte ihre Functionen. Wenn wir also dem für einzelne Linsen bestehenden Sprachgebrauche eine erweiterte Ausdehnung geben, so konnen *F, F** die Brennpunkte des Systems von Mitteln oder von Linsen, wor auf sie sich beziehen, genannt werden, *F* der erste, *F** der zweite ; die durch diese Punkte normal gegen die Axe der *x* gelegten Ebenen mogen die Brennpunktsebenen heissen. Jene Formeln des 6 Art. zeigen zugleich, dafs allen Strahlen, die sich in irgend einem andern Punkte der ersten Brennpunkts ebene kreuzen, ausfahrende entsprechen, die gegen die Axe geneigt, aber unter sich parallel sind, und umgekehrt, dafs allen unter sich aber nicht mit der Axe parallelen einfallenden Strahlen solche ausfahrende entsprechen, die sich in einem von *F** verschiedenen Punkte der zweiten Brennpunklsebene kreuzen.

9.

Mit Hülfe dieser vier Ebenen gelangen wir zu einer sehr einfachen Construction für die Lage des ausfahrenden Strahls. Es schneide der einfallende Strahl die erste Brennpunktsebene in dem Punkte (1), die erste Hauptebene in dem Punkte (2) ; eine Parallele mit (1)(2) durch *F* gezogen treffe die erste Hauptebene in (3) ; eine Parallele mit der Axe durch (2) treffe die zweite Hauptebene in (4) ; endlich eine Parallele mit
der Axe durch (3) treffe die zweite Brennpunktsebene in (5). Dann gibt (4)(5) oder (5)(4) die Lage des ausfahrenden Strahls. Es sind nemlich die Werthe der Coordinaten

für	x	y	z
(1)	F	B'	C'
(2)	E	B	C
F	F	0	0
(3)	E	$B — B'$	$c—c$
(4)	E^*	B	C
(5)	F^*	$B — B'$	$C—C'$

Aus den Formeln des 6 Art. folgt also, dafs der ausfahrende Strahl durch (4) und (5) geht; das erstere unmittelbar, das andere, weil

$$B-B'=\frac{\beta^0}{n^0}\left(E-F\right)=-\frac{\beta^0}{k}$$
$$C-C'=\frac{\gamma^0}{n^0}\left(E-F\right)=-\frac{\gamma^0}{k}$$

In dem gewöhnlichsten Falle, wo $n^*=n^0$, also $F^*-E^*=E-F$, wird die Construction noch einfacher, weil der Punkt (3) überflussig wird ; man braucht nur (1), (2), (4) wie vorhin zu bestimmen, und (4)(5) mit (1)(2) parallel zu ziehen.

Geht die Richtung des einfallenden Strahls, durch E, so geht allemahl die Richtung des ausfahrenden durch E^*, und ist, in dem Falle, wo $n^* = n^0$ ist, zugleich jener parallel. Man pflegt (bei einfachen Linsen) einen solchen Strahl einen Hauptstrahl zu nennen.

Die Entfernungen der zweiten Brennpunktsebene von der zweiten Haupt ebene, und der ersten Hauptebene von der Ebene des ersten Brennpunkts, oder die Gröfsen $-\frac{n^*}{k}$, $-\frac{n^0}{k}$ konnte man die Brennweiten des Systems der Mittel nennen, wenn es nicht angemessener schiene, den Gebrauch dieser Benennung auf den Fall zu beschränken, wo das letzte Mittel dasselbe ist, wie das erste, also jene Entfernungen unter sich gleich sind. Um dem gewöhnlichen Sprachgebrauche conform zu bleiben, sehen wir die Brennweite als positiv an, wenn dem ersten Hauptpunkte eine gröfsere Coordinate entspricht, als dem ersten Brennpunkte, so, dafs die Brennweite immer durch $-\frac{n^*}{k} = -\frac{n^0}{k}$ ausgedrückt wird.

10.

In den oben Art. 4 für den Platz des Bildes gegebenen Formeln ist es wie man leicht sieht verstattet, anstatt *N, N** andere Punkte zu setzen, wenn man nur zugleich anstatt g, *h, k, l* die entsprechenden *G, H, K, L* substituirt. Indem wir dazu die Hauptpunkte wahlen, erhalten wir folgende Ausdrücke :

$$\xi^* = E^* - \frac{n^*(E-\xi)}{n^0 + k(E-\xi)}$$

$$\eta^* = \frac{n^0\eta}{n^0 + k(E-\xi)}$$

$$\zeta^* = \frac{n^0\zeta}{n^0 + k(E-\xi)}$$

Der ersten Formel kann man auch folgende Gestalt geben

$$\frac{n^*}{\xi^* - E^*} + \frac{n^0}{E-\xi} = -k$$

Wahlen wir die Brennpunkte, so erhalten wir

$$\xi^* = F^* + \frac{n^0 n^*}{kk(F-\xi)}$$

$$\eta^* = \frac{n^0\eta}{k(F-\xi)}$$

$$\zeta^* = \frac{n^0\zeta}{k(F-\xi)}$$

Wegen des häufigen Gebrauchs mögen die Formeln auch noch in der Gestalt hier stehen, die sie annehmen, wenn das erste und das letzte Mittel gleich sind, und die Brennweite mit φ bezeichnet wird.

$$\frac{1}{\xi^*-E^*}+\frac{1}{\xi-E}=\frac{1}{\varphi}$$
$$(\xi^*-F^*)(F-\xi)=\varphi\varphi$$
$$\eta^*=-\frac{\varphi\eta}{F-\xi}=-\frac{\eta(\xi^*-F^*)}{\varphi}$$
$$\zeta^*=-\frac{\varphi\zeta}{F-\xi}=-\frac{\zeta(\xi^*-F^*)}{\varphi}$$

11.

Die vier Hülfspunkte *E, E*, F, F** verlieren ihre Anwendbarkeit in dem besoudern Falle, wo $k=0$ ist, also jene Punkte als unendlich entfernt von den brechenden Flächen betrachtet werden müfsten. Man kann sich in diesem Falle unmittelbar an die allgemeinen zur Auflösung der Hauptaufgaben oben mitgetheilten Formeln halten, welche hier folgende Gestalt annehmen.

Wenn die Gleichungen für den einfallenden Strahl so ausgedrückt sind

$$y=\frac{\beta^0}{n^0}\left(x-N^0\right)+b^0$$
$$z=\frac{\gamma^0}{n^0}\left(x-N^0\right)+c^0$$

so sind die für den ausfahrenden

$$y=\frac{l\beta^0}{n^0}\left(x-N^*\right)+gb^0+h\beta^0$$
$$z=\frac{l\gamma^0}{n^*}\left(x-N^*\right)+gc^0+h\gamma^0$$

Setzt man zur Abkurzung

$$N^*-\frac{hn^*}{l}=N^{**}$$

oder, was dasselbe ist, weil $gl=1$,

$$N^*-ghn^*=N^{**}$$

so erscheinen diese Formeln noch einfacher, nemlich

$$y=\frac{l\beta^0}{n^*}\left(x-N^{**}\right)+gb^0$$
$$z=\frac{l\gamma^0}{n^*}\left(x-N^{**}\right)+gc^0$$

Für den Platz des Bildes desjenigen Punktes, dessen Coordinaten $\xi,\ \eta,\ \zeta$ sind, erhalten wir die Coordinaten

$$\xi^*=N^*-ghn^*-\frac{n^*}{n^0}gg\left(N-\xi\right)$$
$$=N^{**}-\frac{n^*}{n^0}gg\left(N^0-\xi\right)$$
$$\eta^*=g\eta$$
$$\zeta^*=g\zeta$$

Es erhellet hieraus, dafs der Punkt der Axe der x, welcher in Gemäfsheit der von uns immer gebrauchten Bezeichnungsart mit N^{**} zu bezeichnen ist, das Bild des Punktes N vorstellt, und dafs das Linearverhältnifs der Theile eines zusammengesetzten Bildes zum Object constant, nemlich wie g zu 1 oder wie 1 zu l ist.

12.

Der im vorhergehenden Artikel betrachtete Fall kommt vor bei einem Fernrohre, Jessen Gläser für ein weitsichtiges Auge und für*das deutliche Sehen unendlich entfernter Gegenstände gestellt sind. Aus obigen Formeln erhellet, dafs die Richtung des ausfahrenden Strahls blofs von der Richtung des ein fallenden abhängt, dafs also parallel unter sich einfallenden Strahlen auch parallel ausfahrende entsprechen, und dafs die Tangente der Neigung der erstem gegen die Axe sich zu der Tangente der Neigung der letztem verhält, wie 1 zu l. Die Zahl $l = \frac{1}{g}$ ist also das, was man die Vergröfserung des Fernrohrs nennt, und ihr positives oder negatives Zeichen bedeutet die auf rechte oder verkehrte Erscheinung. Läfst man die einfallenden und ausfahrenden Strahlen ihre Funktionen vertauschen, indem man den Gegenständen die Ocularseite znwendet, so erscheinen sie in demselben Verhältnisse ver kleinert, und hierauf grundet sich das eben so bequeme als scharfe Verfahren zur Bestimmung der Vergröfserung eines Fernrohrs, welches ich 1823 im 2 Bande der *Astronomischen Nachrichten* mitgetheilt habe.

Eine andere Methode, die Vergröfserung zu bestimmen, beruht auf der Vergleichung eines Gegenständes mit seinem Bilde nach dem linearen Verhältnisse. Ramsdens Dynameter ist nichts anderes, als eine Vorrichtung, den Durchmesser des in N^{**} fallenden Bildes der kreisrunden Begrenzung des Objeclivs zu messen, wobei man sich naturlich erst vergewissern mufs, dafs dieses Bild wirklich erscheint, und nicht etwa durch eine innere Blendung verdeckt ist. Auch mufs das Bild ein reelles sein, wozu erforderlich ist, dafs ghn^* negativ wird : bei einem Galileischen Fernrohr, wo dieses Bild nur ein virtuelles ist, wurde man ein genaues Resultat nur mit einem mikro metrischen Mikroskope erlangen konnen, welches auch in allen Fallen, wo man eine gröfsere schärfe wünscht, den Vorzug verdienen wurde. Übrigens erhellet aus dem vorhergehenden Artikel, dafs eben so gut ein schickliches vom Objectiv entferntes Object gebraucht werden kann, so lange nur die Entfernung nicht so Gröfs wird, dafs das Bild aufhört ein reelles oder mit dem Mikroskope erreichbares zu sein. Endlich mag noch bemerkt werden, dass der Punkt N ** derjenige ist, welcher in der Theorie der Fernrohre mit der Benennung Ort des Auges belegt wird.

13.

Um die allgemeinen Vorschriften des 2 Artikels auf den Fall einer ein fachen Glaslinse anzuwenden, bezeichnen wir das Brechungsverhältnifs beim Übergange aus Luft in Glas mit $n:1$; die Halbmesser der ersten und zweiten Fläche mit $(n-1)\,f$ und $(n-1)\,f'$ die Dicke der Linse mit ne. Wir haben also anstatt der dortigen Bezeichnungen

n^0 hier 1

n' . . . . . n

n'' 1

t' . . . . . e

u^0 . . . . . $-\frac{1}{f}$

u' . . . . . $-\frac{1}{f'}$

und folglich

$$g = 1 + u^0 t' = \frac{f-e}{f}$$
$$h = t' = e$$
$$k = 1 + u't' + t'u^0u' = -\frac{f+f'-e}{ff'}$$
$$l = 1 + u't' = \frac{f'-e}{f'}.$$

Für die Brennweite φ haben wir also nach Art. 9

$$\varphi = \frac{ff'}{f+f'-e}$$

für die beiden hier mit E, E' zu bezeichnenden Hauptpunkte nach Art. 6

$$E = N^0 + \frac{ef}{f+f'-e} = N^0 + \frac{e\phi}{f'}$$
$$E' = N' - \frac{ef'}{f+f'-e} = N' - \frac{e\phi}{f}$$

und für die beiden Brennpunkte F, F'

$$F = E - \varphi = N^0 - \frac{f(f'-e)}{f+f'-e}$$
$$F' = E + \varphi = N' + \frac{f'(f-e)}{f+f'-e}.$$

Für den Durchschnittspunkt der (nöthigenfalls vorwarts oder rückwarts verlängerten) geraden Linie, welche ein Hauptstrahl im Innern der Linse beschreibt, mit der Axe findet man leicht

$$x = N^0 + \frac{nef}{f+f'} = N' - \frac{nef'}{f+f'}$$

Diesen Punkt, welcher also von der Neigung des Hauptstrahls unabhängig ist, nennen einige Schriftsteller den optischen Mittelpunkt der Linse, eine Auszeichnung, welche dieser sonst gar keine merkwurdigen Eigenschaften darbietende Punkt kaum verdient haben mochte, und die hie und da zu dem Irrthum verleitet zu haben scheint, als ob die einfachen Relationen zwischen Bild und Object, welche bei einer unendlich dunnen Linse Statt finden, sich auf eine Linse von endlicher Dicke blofs durch Beziehung auf jenen Mittelpunkt Übertragen liefsen, wahrend diese Übertragung, wie oben gezeigt ist, nur dann gultig ist, wenn das Object auf den ersten, das Bild auf den zweiten Hauptpunkt bezogen wird. Bei einem Systeme von mehrern Linsen, also schon bei einem achromatischen Doppelobjective, kann ohnehin von einem Mittelpunkte in jenem Sinne gar nicht die Rede sein. Will man die Benennung beibehalten, so würde ich für angemessener halten, sie demjenigen Punkte beizulegen, welcher zwischen den beiden Hauptpunkten (mithin auch zwischen den beiden Brennpunkten) in der Mitte liegt, und der mit jenem Punkte nur dann zusammenfällt, wenn die Linse gleichseitig ist. Dieser Punkt hat die praktisch nützliche Eigenschaft, durch Umwenden der Linse leicht und mit Schärfe bestimmbar zu sein; denn offenbar ist es dieser Punkt, der beim Umwenden wieder den vorigen Platz einnehmen mufs, wenn der Platz des Bildes von einem festen Objecte ungeändert bleiben soll.

Es mag hier noch bemerkt werden, dafs die Entfernung der beiden Hauptpunkte von einander

$$E' - E = ne - \frac{e(f+f')}{f+f'-e} = (n-1)e - \frac{ee}{f+f'-e}$$

wird, also, insofern gewöhnlich e gegen $f+f'-e$ sehr klein ist, von $(n-1)e$ oder von der durch $\frac{n-1}{n}$ multiplicirten Dicke der Linse kaum merklich verschieden ist.

14.

An die Stelle der allgemeinen Formeln des 2 Art., durch welche aus dem Wege des einfallenden Lichtstrahls der Weg des ausfahrenden bestimmt wird, lassen sich für den Fall eines Systems von Linsen auf einer gemein schaftlichen Axe bequemere setzen, indem man, anstatt der Halbmesser der einzelnen brechenden Flächen und ihrer gegenseitigen Abstände, die Brennweiten der einzelnen Linsen und die Entfernungen, ihrer zweiten Hauptpunkte von den ersten der folgenden Linsen einführt. Die neuen Formeln werden denen des 2 Art. ganz ähnlich, enthalten aber nur halb so viele Elemente. Da ihre Ableitung aus dem Vorhergehenden sehr leicht ist, so wird es hinreichend sein, sie in gebrauchfertiger Form hieher zu setzen.

Wir bezeichnen die Brennweiten der einzelnen auf einander folgenden Linsen mit $\varphi°$, φ', φ'' u. s. f.; ihre Hauptpunkte hier, abweichend von der bisherigen Bezeichnungsart, die ersten mit $E°$, E', E'' u. s. f., die zweiten mit $I°$, I', I'' u. s. f. Zur Abkürzung schreiben wir

$$-\frac{1}{\varphi^0} = u^0,\ -\frac{1}{\varphi'} = u',\ -\frac{1}{\varphi''} = u'',\ \text{etc.}$$

$$E' - I^0 = t',\ E'' - I' = t'',\ E''' - I'' = t''',\ \text{etc.}$$

die letzten Glieder in diesen Reihen mögen als solche durch ein Sternchen aus gezeichnet werden.

Setzt man nun die Gleichungen für den einfallenden Strahlin die Form

$$y = \beta^0\left(x - E^0\right) + b^0$$

$$z = \gamma^0\left(x - E^0\right) + c^0$$

für den ausfahrenden hingegen in folgende

$$y=\beta^*(x-I^*)+b^*$$
$$z=\gamma^*(x-I^*)+c^*$$

so wird, wenn die vier Gröfsen *g, h, k, l* durch Formeln bestimmt werden, die mit den im 2 Art. als (5) bezeichneten ganz identisch sind,

$$b^*=gb^0+h\beta^0,\ c^*=gc^0+h\gamma^0$$
$$\beta^*=kb^0+l\beta^0,\ \gamma^*=kc^0+l\gamma^0$$

Für die beiden Hauptpunkte des Linsensystems, als Ganzes betrachtet, wird

für den ersten $x=E^0-\frac{1-l}{k}$

Für den zweiten $x=I^*+\frac{1-g}{k}$.

Ferner wird für die beiden Brennpunkte des Linsensystems

für den ersten $x=E^0+\frac{l}{k}$

für den zweiten $x=I^*-\frac{g}{k}$

die Brennweite selbst ist $=-\frac{1}{k}$

Die Formeln für den Fall, wo das System nur aus zwei Linsen besteht, verdienen noch besonders hergeschrieben zu werden. Man hat nemlich

$$g=\frac{\varphi^0-t'}{\varphi^0}$$
$$h=\frac{-1}{\varphi^0}$$
$$k=-\frac{\varphi^0+\varphi'-t'}{\varphi\varphi'}$$
$$l=\frac{\varphi'-t'}{\varphi'}$$

Die Werthe von *x* für die beiden Hauptpunkte sind

$$E^0+\frac{t'\varphi^0}{\varphi^0+\varphi'-t'}\quad\text{und}\quad I'-\frac{t'\varphi'}{\varphi^0+\varphi'-t'}$$

und die Brennweite

$$=\frac{\varphi^0\varphi'}{\varphi^0+\varphi'-t}$$

Man sieht, dafs diese Formeln denen ganz analog sind, die im 13 Artikel Für die Bestimmung der Hauptpunkte und der Brennweite einer einfachen Linse gegeben sind, indem an die Stelle der dortigen f^0, f', e hier die Gröfsen φ^0, φ', t' treten.

Die Entfernung der beiden Hauptpunkte von einander wird in dem Fall zweier Linsen

$$= I' - E^0 - \frac{t'(\varphi^0 + \varphi')}{\varphi^0 + \varphi' - t'}$$
$$= I^0 - E^0 + I' - E' - \frac{tt'}{\varphi^0 + \varphi' - t'}$$

Ist t' sehr klein, wie bei achromatischen Doppellinsen von der gewöhnlichen Einrichtung immer der Fall ist, so wird das letzte Glied unbedeutend, und daher die Entfernung der beiden Hauptpunkte von einander für eine solche Doppellinse als Ganzes betrachtet sehr nahe der Summe der bei den Werthe gleich, welche diese Entfernung in den Linsen, einzeln genommen, hat.

Übrigens ist von selbst klar, dafs die sämmtlichen in dem gegenwartigen Artikel aufgeführten Formeln ohne alle Veränderung auf den Fall übertragen werden konnen, wo anstatt einfacher Linsen partielle Systeme von Linsen zu Einem ganzen Systeme vereinigt werden sollen.

15.

Die optischen Erscheinungen sowohl durch eine einfache Linse, als durch ein System von mehreren auf gemeinschaftlicher Axe, hängen, wie wir gezeigt haben, von drei Elementen ab, welche durch das Brechungsverhältnifs (oder durch die Brechungsverhältnisse, wenn sie für die verschiedenen Linsen verschieden sind), und die Lagen und Halbmesser der brechenden Flächen bestimmt sind : da jedoch diese Gröfsen gewöhn lich unmittelbar nicht bekannt sind, so bleibt noch übrig, einiges über die Methode zu sagen, durch welche umgekehrt aus beobachteten Erscheinungen jene drei Elemente abgeleitet werden konnen. Wir bezeichnen die verschiedenen hierbei in Frage kommenden Punkte der Axe auf folgende Weise :
ξ ein Object ; ξ' dessen Bild ; F der erste, F' der zweite Brennpunkt ; E der erste, E' der zweite Hauptpunkt ; endlich D ein mit der Linse (oder dem Linsensystem) in fester Verbindung stehender Punkt. Mit denselben Buchstaben werden, wie immer, die Coordinaten dieser Punkte in jedem Versuche bezeichnet. Wir setzen ferner die Brennweite $= f$, und die Entfernung des Punktes D von den Brennpunkten, $D - F = p,\ \ F' - D' = q.$ Die drei Gröfsen f, p, q konnen als die Elemente der Linse betrachtet werden, und zu ihrer Ausmittelung werden also immer drei Versuche erforderlich sein, indem in drei verschiedenen Lagen des Objects und seines Bildes gegen die Linse die Entfernungen derselben von dem Punkte D gemessen werden müssen, welche Aufgabe wir zuvörderst ganz allgemein Auflösen wollen.

Die Werthe von $D - \xi$ und $\xi' - D$ seien in einem Versuche a, b ; in einem zweiten a', b' in einem dritten a'', b''. Die allgemeine Gleichung

$$(F - \xi)(\xi' - F') = ff$$

gibt uns demnach

$$(a - p)(b - q) = ff$$
$$(a' - p)(b' - q) = ff$$
$$(a'' - p)(b'' - q) = ff$$

woraus durch Elimination leicht gefunden wird

$$p = a - \frac{(a'-a)(a''-a)(b'-b'')}{R}$$
$$q = b - \frac{(b'-b)(b-b'')(a''-a)}{R}$$
$$ff = \frac{(a'-a)(a''-a)(a''-a')(b-b')(b-b'')(b'-b'')}{RR}$$

indem zur Abkurzung

$$(a''-a)(b-b')-(a'-a)(b-b'') = R$$

geschrieben wird. Man kann *R* auch in folgende Form setzen

$$R = (a''-a')(b-b')-(a'-a)(b'-b'')$$
$$= (a''-a')(b-b'')-(a''-a)(b'-b'')$$

so wie *p* und *q* in folgende

$$p = a' - \frac{(a'-a)(a''-a)(b-b'')}{R}$$
$$= a'' - \frac{(a''-a)(a''-a')(b-b')}{R}$$
$$q = b' - \frac{(b-b')(b'-b'')(a''-a)}{R}$$
$$= b'' - \frac{(b-b'')(b'-b'')(a'-a)}{R}.$$

16.

Der allgemeinen im vorhergehenden Artikel gegebenen Auflösung müssen noch einige Bemerkungen beigefugt werden.

I. Es ist vorausgesetzt, dafs in den drei Versuchen das Object auf einer und derselben Seite der Linse liegt. Findet man zweckmäfsig, in einem der Versuche die Linse in verkehrter Lage anzuvvenden, so kann man sich denselben so vorstellen, als ob das Bild der Gegenständ und der Gegenständ das Bild ware, wodurch dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt wird.

II. Für sich allein betrachtet, läfst die Formel für *ff* noch unbestimmt, ob *f* positiv oder negativ zu nehmen sei : dies entscheidet sich aber schon durch die aufrechte oder verkehrte Stellung des Bildes, indem $\xi' - F$ und f im ersten Fall entgegengesetzte, im zweiten gleiche Zeichen haben müssen. Auch darf nicht unbemerkt bleiben, dafs bei aller Allgemeingultigkeit der analytischen Auflösung doch die praktische Anwendbarkeit auf den Fall wirk licher Bilder (also für einzelne Linsen auf positive Brennweiten) beschränkt bleibt, wenn nicht besondere Hülfsmittel zur Bestimmung des Platzes virtuel ler Bilder zugezogen werden.

III. Da die Ausführung der Versuche immer nur einen gewissen beschränkten Grad von Schärfe zuläfst, so ist es für die Zuverlässigkeit der Resultate keinesweges gleichgültig, was für Combinationen gewählt werden. Im Allgemeinen kann als Regel gelten, dafs durch drei Versuche, von denen zwei unter wenig verschiedenen Umständen gemacht sind, jedenfalls nicht alle drei Elemente mit Schärfe bestimmt werden können.

17.

An einer einfachen Linse sowohl, als an einer solchen, die aus zweien oder mehrern sehr nahe zusammenliegenden zusammengesetzt ist (wie an achromatischen Objectiven von der gewöhnlichen Einrichtung), stehen die beiden Hauptpunkte in geringer Entfernung von einander. Dürfte man diese Entfernung $E' - E = \lambda$ wie eine bekannte Gröfse betrachten, so würden zwei Versuche zureichend sein, indem die Gleichung

$$p + q = 2f + \lambda$$

die Stelle des dritten Versuches vertritt. Verbindet man mit derselben die beiden andern

$$(a - p)(b - q) = ff$$
$$(a' - p)(b' - q) = ff$$

so erhält man nach der Elimination von *p* und *q* zur Bestimmung von *f* die Gleichung

$$\tfrac{a'+b'-a-b}{(a'-a)(b'-b)} \cdot ff + 2(a+b+a'+b'-2\lambda)\, f - (a+b'-\lambda)(a'+b-\lambda) = 0.$$

Diese quadratische Gleichung geht in eine lineare über, wenn $a' + b' - a - b = 0$ wird, d. i. wenn die beiden Versuche so angeordnet sind, dafs die Entfernung des Bildes vom Objecte in beiden dieselbe bleibt, während die Linse darin zwei verschiedene Stellen einnimmt. Es sei diese Entfernung $= c$, also $a' = c - b$, $a' = c - b'$; dadurch wird

$$4(c-\lambda)\, f = (c - \lambda + b' - b)(c - \lambda - b' + b)$$

oder

$$f = \tfrac{1}{4}(c - \lambda) - \tfrac{(b'-b)^2}{4(c-\lambda)}.$$

Für jeden vorgeschriebenen Werth von *c* mufs nemlich $F - \xi$ der Gleichung

$$F - \xi + \tfrac{ff}{F-\xi} = F - \xi + \xi' - F' = c - 2f - \lambda$$

Genuge leisten, deren zwei Wurzeln

$$F - \xi = \tfrac{1}{2}(c - 2f - \lambda) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(c - 4f - \lambda)(c - \lambda)}$$
$$F - \xi = \tfrac{1}{2}(c - 2f - \lambda) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(c - 4f - \lambda)(c - \lambda)}$$

reell und ungleich sind, wenn *c* Gröfser ist, als $4f + \lambda$, so dafs es dann für ein festes Object ξ immer zwei verschiedene Lagen der Linse gibt, bei welchen das Bild mit dem

Punkte $\xi + c$ zusammenfällt. Das Product dieser beiden Werthe von $F - \xi$, d. i. $(a-p)(a'-p)$ wird $= ff$, woraus zugleich erhellet, dafs $a-p = b-q$ und $b'-q = a-p$ wird, folglich

$$p = \tfrac{1}{2}(2f + c + \lambda - b - b')$$

$$q = \tfrac{1}{2}(2f - c + \lambda + b + b')$$

$$E = D + \tfrac{1}{2}(b + b' - c) - \tfrac{1}{2}\lambda$$

$$E' = D + \tfrac{1}{2}(b + b' - c) + \tfrac{1}{2}\lambda$$

18.

Bei derjenigen Stellung der Linse, wo $F - \xi = f$ wird, ist $\xi' - \xi = 4f + \lambda$, oder das Bild in der kleinsten Entfernung vom Gegenstände ; es entfernt sich von demselben, sobald man die Linse aus jener Stellung nach der einen oder nach der andern Seite wegrückt, aber offenbar anfängs sehr längsam. Es folgt daraus, dafs wenn für c ein die Gröfse $4f + \lambda$ nur wenig Überschreitender Werth gewählt ist, die Versuche zur Ausmittelung der beiden erforderlichen Stellungen der Linse oder der Werthe von b und b' nur eine vergleichungsweise geringe Schärfe zulassen. Diese Unsicherheit fällt in ihrer ganzen Starke auf die Bestimmung von E und E', daher zu diesem Zweck die Anwendung des Verfahrens unter solchen Umständen nicht wohl zu gebrauchen ist. Anders aber verhält es sich, wenn es nur darauf ankommt, die Brennweite zu bestimmen, wo die Schärfe durch jenen Umständ Nichts verliert, weil in den Ausdrück für f nur das Quadrat von $b' - b$ eintritt. Die Ausubung des Verfahrens ist überdies in diesem Falle um so bequemer, weil aufser der Distanz c nur die Gröfse der Verschiebung der Linse $b' - b$ gemessen zu werden braucht, also die absoluten Werthe von b und b' unnöthig sind.

19.

Wenn man λ ganz vernachlässigt, also

$$f = \tfrac{1}{4}c - \tfrac{(b'-b)^2}{4c}$$

setzt, so kommt das beschriebene Verfahren mit demjenigen überein, welches Bessel im 17 Bande der Astronomischen Nachrichten vorgeschlagen, und auf die Bestimmung der Brennweite des Objectivs des Königsberger Heliometers angewandt hat. Die strenge Formel zeigt, dafs bei der Vernachlässigung von λ die Brennweite um

$$\tfrac{1}{4}\lambda + \tfrac{\lambda(b'-b)^2}{4c(c-\lambda)}$$

zu Gröfs gefunden wird, wo der zweite Theil unter den erwahnten Umstän den als unmerklich betrachtet werden kann. Zur Gewinnung eines der Schärfe, welche das Verfahren an sich verstattet, angemessenen Resultats bleibt daher die Berücksichtigung von λ wesentlich nothwendig : nur hat es einige Schwierigkeit, sich eine genaue Kenntnifs dieser Gröfse zu verschaffen. Für eine einfache Linse wird es hinlänglich sein, aus der gemessenen Dicke derselben und dem nothdürftig bekannten

Brechungsverhältnisse für λ den oben Art. 13 gegebenen Näherungswerth zu berechnen. Auch für eine achromatische Doppellinse mag man allenfalls, in sofern man sich eine genaue Kenntnifs von der Dicke jedes einzelnen Beständtheils verschaffen kann, sich des oben Art. 14 angeführten genäherten Werthes bedienen. Um wenigstens ungefahr eine Vorstellung von dem Einflusse, welchen die Vernachlässigung von λ haben kann, zu erhalten, wollen wir, Beispiels halber, ein Objectiv betrachten, wo die Dicke der Kronglaslinse 7 Linien, die Dicke der Flintglaslinse 3 Linien betragt, und das Brechungsverhältnifs für die erstere zu 1,528, für die andere zu 1,618 annehmen. Dadurch wird die Entfernung der beiden Hauptpunkte von einander näherungsweise

für die Kronglaslinse	2,42
für die Flintglaslinse	1,15
und für die zusammengesetzte Linse	3,57 Linien

also die Brennweite um 0,89 Linien zu Gröfs. An einem Objective von 8 Fufs Brennweite, dem die vorausgesetzten Dimensionen zukamen, würde also der Fehler etwa $\frac{1}{1300}$ des Ganzen betragen.

20.

Wenn man die im vorhergehenden Art. angegebene Bestimmungsart von λ nicht anwenden kann, oder sich nicht damit begnügen will, so scheint folgender Weg am zweckmäfsigsten, um durch unmittelbare Versuche dazu zu gelängen.

Man bestimme den Platz des Bildes eines sehr entfernten Gegenständes (so gut man kann in der Axe der Linse) relativ gegen den Punkt D. In sofern man die Entfernung des Objects als unendlich Gröfs betrachten kann, Fällt dieses Bild in F' und der gemessene Abständ $F'-D$ gibt also unmittelbar q. Man wiederhohle den Versuch, indem man die Linse umkehrt, wo also das Bild in F fallen, und seine Entfernung von D den Werth von p geben wird. Für den dritten Versuch bringe man das Object (auf der Seite von F) der Linse moglichst nahe, bestimme die Entfernung des Bildes von diesem Object $=\xi-\xi'$, und zugleich die Entfernung $D-\xi=a''$, und setze $\xi'-D=\xi'-\xi-a''=b''$. Man hat folglich

$$(p-a'')(q-b'')=ff \text{ oder}$$
$$\lambda=p+q-2\sqrt{(p-a'')(q-b'')}$$

Hat man die Messungen in allen drei Versuchen mit Gröfster Schärfe ausfuhren konnen, so sind dadurch allein schon alle drei Elemente p, q, f hinlänglich genau bestimmt, und es bedarf keiner andern weiter. Wünscht man aber f mit einer noch gröfsern Schärfe zu erhalten, so hat man jene Versuche nur als eine Vorbereitung zu dem Verfahren des 18 Artikels zu be trachten, die den Werth von λ liefert. Um klärer zu übersehen, von welchen Momenten die Schärfe in der so erhaltenen Bestimmung von λ hauptsachlich abhängt, setzen wir obige Formel für λ in folgende Gestalt

$$\lambda=a''+b''+\frac{\left(p-a''-\sqrt{(p-a'')(q-b'')}\right)^2}{p-a''}$$

und erwagen, dafs $p-a''-\sqrt{(p-a'')(q-b'')}$ den Abständ des Objects im dritten Versuche vom ersten Hauptpunkte, $p-a''$ hingegen den Abständ jenes Objects vom ersten Brennpunkte vorstellt. Es erhellet daraus, dafs unter den Statt habenden Umständen der letzte Theil der Formel für λ nur sehr klein wird, und sein berechneter Werth von kleinen Ungenauigkeiten in den Werthen von p, q, a'', b'' nur wenig afficirt wird, also die Schärfe der Bestimmung von λ hauptsachlich nur von der Schärfe der Messung von $\xi'-\xi=a''+b''$ abhängt.

21.

In Beziehung auf das im vorhergehenden Artikel angegebene Verfahren verdienen ein Paar Bemerkungen hier noch einen Platz.

I. Zur Ausführung des dritten Versuchs, wo das Bild nur ein virtuelles wird, reichen die sonst anwendbaren Mittel nicht aus : folgende Methode vereinigt aber Bequemlichkeit und Schärfe. Auf einer ebenen Fläche wird eine Kreislinie beschrieben, so gröfs oder wenig gröfser als der vorspringende Rand der Fassung des Glases, und der Mittelpunkt dieses Kreises durch zwei zarte Kreuzlinien bezeichnet. Das Glas wird mit der Fassung so auf die Fläche gelegt, dafs jene mit der Kreislinie concentrisch ist ; dann ein zusammenge setztes an einem festen Stative befindliches und mit einem Fadenkreuze ver sehenes Mikroskop senkrecht darüber gestellt, und in seiner Hülse so verschoben, bis das Bild der Kreuzlinie genau mit dem Fadenkreuze zusammen fällt ; endlich wird das Glas weggenommen, und das Mikroskop durch Verschieben in der Hülse der Ebene genähert, bis das Bild der Kreuzlinie abermahls mit dem Fadenkreuze des Mikroskops zusammenfällt. Die leicht auf irgend eine Weise scharf zu messende Gröfse der letztem Verschiebung ist die Entferinnig des Objects (der Kreuzlinie) von seinem durch die Glaslinse producirten Bilde $=\xi'-\xi$. Der Punkt der Axe der Linse, welcher in der den vorjspringenden Rand der Fassung berührenden Ebene liegt, kann man als den festen Punkt *D* selbst annehmen, in welchem Falle $a''=0$, $b''=\xi'-\xi$ wird, oder, wenn ein anderer Punkt *D* gewählt war, diesen mit jenem durch leicht sich darbietende Mittel vergleichen, um a'' zu finden.

II. Wenn die Entfernung des für den ersten und zweiten Versuch benützten Gegenständes, zwar grofs, aber doch nicht grofs genug ist, um sein Bild als mit dem Brennpunkte ganz zusammenfallend betrachten zu konnen, so ist eine Reduction nöthig, welche man erhalt, indem man das Quadrat der Brennweite mit der Entfernung des Gegenstandes dividirt, und diese Reduction ist von den Abständen des Bildes von dem Punkte *D* abzuziehen, um die Gröfsen *q* und *p* genau zu erhalten : offenbar ist dazu nur eine grob genäherte Kenntnifs der Brennweite und der Entfernung nöthig, insofern letztere sehr grofs ist. Indessen kann man diese Reduction eben so leicht durch directe strenge richtige Formeln bestimmen. Es sei für den ersten Versuch *a* der Werth von $D-\xi$, *b* der Werth von $\xi'-D$ für den zweiten Versuch hingegen (wo die Linse in verkehrter Stellung angewandt wird) bezeichne man die Entfernung $D-\xi$ mit b', und $\xi'-D$ mit a'. Auf diese Weise (die mit der Art. 16, I angegebenen auf Eins hinauslauft) erreichen wir den Vortheil, dafs die für die drei Versuche Statt findenden Gleichungen

$$(a-p)\quad(b-q)=ff$$
$$(b'-q)\;(a'-p)=ff$$
$$(a''-p)(b''-q)=ff$$

gleichlautend mit denen sind, von welchen wir im 15 Art. ausgingen, und also auch die durch Elimination daraus abgeleiteten Formeln ihre Gultigkeit behalten. Ist man bei der Ausführung des zweiten Versuches so zu Werke gegangen, dafs der Ort des Bildes im Raume derselbe ist wie im ersten Versuche (was leicht geschehen kann, obwohl der Erfolg bei der vorausgesetzten grofsen Entfernung des Gegenständes gar nicht merklich abgeändert wird, wenn man es damit nicht angstlich genommen hat), so wird $a+b=b'+a'$, welche Gröfse wir mit c bezeichnen, und die Formeln des 15 Art. erhalten dadurch noch einige Vereinfachung. Es wird nemlich, aus der zweiten Formel für p und der ersten für q,

$$p=a'-\frac{(a'-a'')(b-b'')}{c-a''-b''}$$
$$q=b-\frac{(a'-a'')(b-b'')}{c-a''-b''}$$

III. Wenn man auch das Verfahren des 20 Art. nicht zur vollständigen Bestimmung der Elemente gebrauchen, sondern die schärfste Bestimmung der Brennweite der Methode des 17 Art. Vorbehalten will, so bleibt doch jenes zugleich das geeignetste, um die Lage der beiden Hauptpunkte festzusetzen. Es wird nemlich

$$E=D+\tfrac{1}{2}(q-p)-\tfrac{1}{2}\lambda=D+\tfrac{1}{2}(b-a')-\tfrac{1}{2}\lambda$$
$$E'=D+\tfrac{1}{2}(q-p)+\tfrac{1}{2}\lambda=D+\tfrac{1}{2}(b-a')+\tfrac{1}{2}\lambda$$

22.

Für eine einfache Linse und, allgemein zu reden, auch für ein System von Linsen kann man der Brennweite einen bestimmten Werth und den Haupt - und Brennpunkten bestimmte Platze nur in sofern beilegen, als von Lichtstrahlen von bestimmter Brechbarkeit die Bede ist ; für Strahlen von anderer Brechbarkeit erhalten diese Punkte andere Platze und die Brennweite einen andern Werth, und das nicht homogene Licht von Gegenständen erleidet daher beim Durchgange durch Gläser eine Farbenzerstreuung. Durch eine Zusammensetzung zweier oder mehrerer Linsen aus verschiedenen Glasarten läfst sich diese Farbenzerstreuung aufheben : zur Vollkommenheit eines achromatischen Objectivs wird aber erforderlich sein, dafs Parallelstrahlen sich unabhängig von der Farbe in Einem Punkte vereinigen, und zwar nicht blofs solche, die parallel mit der Axe, sondern auch solche, die geneigt gegen die Axe einfallen, oder mit andern Worten, die verschiedenfarbigen Bilder eine ausgedehnten als unendlich entfernt betrachteten Gegenständes müssen nicht blofs in Eine Ebene fallen, sondern auch gleiche Gröfse haben. Die erste Bedingung beruhet auf der Identität des zweiten Brennpunkts für verschieden farbige Strahlen, die zweite auf der Gleichheit der Brennweite, und da diese die Entfernung des zweiten Brennpunkts vom zweiten Hauptpunkte ist, so kann man auch die beiden Bedingungen dadurch ausdrücken, dafs beide Punkte zugleich für rothe und violette Strahlen dieselben sein müssen. Ist die erste Bedingung allein erfullt, so gehen die gegen die Axe geneigten Strahlen kein reines Bild ; allein eine sehr geringe Ungleichheit der Brennweiten für verschiedenfarbige Strahlen wird immer als ganz unschadlich betrachtet wer den durfen.

In der Theorie der achromatischen Objective pflegt man nur die erste Bedingung zu berücksichtigen. Allein bei der gewöhn lichen Construction dieser Objective, wo die beiden Linsen entweder in Berührung oder in einem aufserst geringen Abstände von einander sich befinden, wird die Lage der Hauptpunkte von der ungleichen Brechbarkeit der Lichtstrahlen so wenig afficirt, dafs die zweite Bedingung von selbst erfullt ist, wenn nicht genau, doch so nahe, dafs eine merkliche Unvollkommenheit nicht daraus entstehen kann : auch läfst sich, wenn man es der Mühe werth halt, die Dicke der Linsen so berechnen, dafs eine genaue Identitat des zweiten Hauptpunkts für un gleiche Strahlen Statt findet.

Anders verhält es sich hingegen, wenn die convexe Kronglaslinse von der concaven Flintglaslinse durch einen betrachtlichen Abstand getrennt ist. Es läfst sich leicht zeigen, dafs bei solchen Bestimmungen für diesen Abstand und die Brennweiten der einzelnen Linsen, wo der zweite Brennpunkt dieses Linsensystems für verschiedenfarbige Strahlen derselbe bleibt, die Brennweite dieses Systems für die violetten Strahlen nothwendig gröfser wird als für die rothen, und dafs der Unterschied von derselben Ordnung ist wie derjenige, der (im umgekehrten Sinn) bei einfachen Linsen Statt findet. Dasselbe gilt auch noch, wenn (wie bei den sogenannten dialytischen Fernröhren geschieht) anstatt der zweiten Linse eine Zusammensetzung aus einer Flintglaslinse, und einer Kronglaslinse, in Berührung oder sehr geringem Abstände von einan der, angenommen wird. Immer bleibt es unmoglich, auf diese Weise von einem ausgedehnten Objecte ein vollkommen farbenreines Bild hervorzubringen, indem das violette Bild, wenn es in demselben Abstände von dem Linsensy steme liegen soll wie das rothe, nothwendig gröfser wird, als das letztere.

Man darf jedoch hieraus keinesweges folgern, dafs Fernröhre von dieser letztem Einrichtung in Beziehung auf Achromatismus unvollkommener bleiben müssen, als Fernröhre mit achromatischen nach der gewöhnlichen Art construirten und ein vollig farbenreines Bild hervorbringenden Objectiven. Man kann vielmehr gerade umgekehrt behaupten, dafs jene bei einer wohlberechneten Anordnung der Oculare dem Auge das farbenreinere Bild zu geben fähig sind.

In der That kann ein vollkommen farbenreines vom Objectiv erzeugtes Bild (möge es ein wirkliches oder virtuelles sein) wegen der Farbenzerstreuung, welche durch die Oculargläser hervorgebracht wird, dem Auge nicht voll kommen rein erscheinen ; man verhutet zwar durch besondere Anordnung der Oculare den sogenannten farbigen Band, kann aber damit die Längenab weichung nicht aufheben, welche noch durch den Umständ vergrösert wird, dafs das menschliche Auge selbst nicht achromatisch ist. Man bewirkt nur, dafs die letzten Bilder, rothes und violettes, in einerlei scheinbarer Gröfse, nicht aber, dafs sie in gleichem Abstände oder zugleich deutlich erscheinen.

Die ungleiche Gröfse der ersten Bilder, des rothen und violetten, welche bei den dialytischen Objectiven unvermeidlich ist, läfst sich aber durch eine angemessene Einrichtung der Oculare sehr wohl compensiren, so dass der farbige Rand in der

Erscheinung eben so gut gehoben wird, wie bei Fernröhren von gewöhnlicher Einrichtung, wahrend die zweite eben berührte Unvollkommenheit auch hier - bleibt, so länge das erste rothe und violette Bild in gleicher Entfernung von dem Objective liegen.

Es ist also klär, dafs um im Auge ein vollkommen farbenreines Bild hervorzubringen, das erste Bild eine gewisse von den Verhältnissen der Oculare und dem Nichtachromatismus des menschlichen Auges abhängende Längenabweichung haben muss. Theoretisch betrachtet läfst sich nun allerdings auch ein Objectiv von gewöhn licher Einrichtung so berechnen, dafs eine vorgeschriebene Längenabwreichung Statt findet ; allein abgesehen von der Schwierigkeit, der ganzen Schärfe, welche zur Darstellung so sehr kleiner Unterschiede erfordert wird, in der technischen Ausführung nachzukommen, würde doch diese Längenabweichung immer nur für ein bestimmtes Ocular passen.

Bei der dialytischen Einrichtung hingegen ist durch die Verschiebbarkeit der den zweiten Theil des Objectivs bildenden Doppellinse gegen den ersten das Mittel gegeben, diejenige Längenabweichung zu erhalten, welche für jedes Ocular erforderlich ist, wahrend das Ocular so eingerichtet sein kann, dafs der farbige Rand gehorig gehoben wird. Übrigens mufs ich mich hier auf diese kurze Andeutung beschränken v und eine ausführlichere Entwickelung dieses interessanten Gegenständes einer andern Gelegenheit Vorbehalten.