Translated by Ian Bruce (2013).

CONTINUED INVESTIGATIONS INTO THE PROPAGATION OF SOUND (E307)

1. In the two preceding papers on this matter, I have done enough to consider that it would be of some importance if the theory of the propagation of sound in the air could be put in place, considering it spreading out in every direction ; and that one might succeed according to this hypothesis as well as in that where one supposes the air has a motion only in one dimension along a straight line. After explaining the propagation of sound according to the hypothesis of a single dimension, in my first memoir on this matter, I tried to treat the same subject in the supplement, assuming first air in two dimensions in a plane, and then by introducing all three dimensions into the calculation. I also managed to find analytical formulas that contain all the possible movements of which the air is capable, but finding the solution to the proposed question appeared too difficult for me, for which I had dared to hope for a happy outcome.

2. When I considered two dimensions only, I had applied the formulas found to the case where the first agitation happens as if at a point, from which the disturbances then spread out everywhere in equal concentric circles, since this is the case in particular for the propagation of sound. But the formula that I found is subject to so great difficulties, in as much as I could see no way of overcoming them, and having used the same method in the hypothesis of three dimensions, I could hope at least that I would be able to develop the formula that determines the disturbances expanding in all directions from a fixed point by concentric spherical surfaces.

3. Yet it is precisely here, as I've noticed since, that the difficulties are not invincible ; and the case is similar to one of those proposed formerly by Count Riccati, where some equation may be made integrable [by multiplying the equation by an integrating factor], while in general it is not soluble. This finding is all the more important, because now it puts me into a position of being able to determine perfectly the propagation of sound in the assumption that the air is spreading out in every direction ; and that seemed almost impossible until now. There is also no doubt, having overcome this great obstacle, why one cannot come upon a method at last to solve directly the formulas that I had found for transmitting the disturbances in the air, and perhaps be used even for more complicated formulas of the same kind, from which the highest parts of mathematics will derive the greatest benefits.

4. Let A (Fig. 1) be the centre of the original disturbance which spreads successively

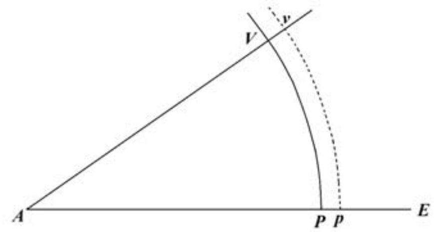

Fig. 1.

by concentric layers in every direction ; let $AP = AV = V$ be the radius of some spherical surface PV in the equilibrium state [i.e. initially $t = 0$], which, after some time $= t$, takes the position pv, then the radius becomes $Ap = Av = V + u$, where the interval $Pp = Vv = u$, which I consider to be extremely small, and it is necessary to determine this interval u in terms of the original radius $AV = V$ and the time t elapsed since the agitation. With that in place, I found this equation in § 45 of the previous memoir, putting $s = \frac{u}{V}$ or $u = Vs$,

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{4}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right)$$

or indeed, by replacing s [*i.e.* u is a small lateral displacement experienced by the air due to the sound at some instant, while s is an associated dimensionless variable and $2gh$ has the dimensions of speed^2] with the value $\frac{u}{V}$, there the paragraph following has provided the equation

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = -\frac{2u}{VV} + \frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right).$$

where h is the height of a column of air whose weight is in equilibrium with the elasticity of the air, g indicates the height that a body falls [from rest; explained in E305] in a second, expressing the time t in seconds.

5. If one supposes that the air has only two dimensions according to a plane and that the disturbances shall be expanding out in concentric circles, by keeping the same denominations, one should be able to resolve this equation

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{3}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right)$$

which appeared irresolvable to me, at least by the same method which was used in the preceding equation. To get a better grasp of this difference, let us consider these equations in a more general form

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right)=\frac{n}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)+\left(\frac{dds}{dV^2}\right)$$

and seeing how it is required to take a function of the two variables V and t to which the variable s is equal. I will use a method, seems to be used with success in all kinds of similar equations where the time enters into the consideration, and which consists of the time being eliminated completely.

6. In order to do this, I put

$$s=P\sin\left(\alpha t+\mathfrak{A}\right),$$

where P shall be a function of the single variable V, and since one will have

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)=\alpha P\cos\left(\alpha t+\mathfrak{A}\right),\quad \left(\frac{dds}{dt^2}\right)=-\alpha\alpha P\sin\left(\alpha t+\mathfrak{A}\right),$$
$$\left(\frac{ds}{dV}\right)=\frac{dP}{dV}\sin\left(\alpha t+\mathfrak{A}\right),\quad \left(\frac{dds}{dV^2}\right)=\frac{ddP}{dV^2}\sin\left(\alpha t+\mathfrak{A}\right),$$

our equation will become divisible by $\sin\left(\alpha t+\mathfrak{A}\right)$, and it will become

$$-\frac{\alpha\alpha P}{2gh}=\frac{ndP}{VdV}+\frac{ddP}{dV^2},$$

which contains only the two variables V and P, where the differential dV is taken constant [*i.e*. the independent variable]. Thus it is necessary to resolve this second order differential equation which, on putting

$$\frac{\alpha\alpha P}{2gh}=mm,$$

will take this form

$$mmPdV^2+\frac{ndVdP}{V}+ddP=0,$$

which has this property, that the variable P has a single dimension only.

7. Thus, putting

$$P = e^{\int pdV} \text{ or } \frac{dP}{P} = pdV,$$

this equation will be reduced to a differential of the first order

$$mmdV + \frac{npdV}{V} + dp + ppdV = 0,$$

from which, putting

$$V^n p = q \text{ or } p = \frac{q}{V^n},$$

[since $V^n p = q$ *i.e.* $nV^{n-1}dVp + V^n dp = dq,$ or $\frac{npdV}{V} + dp = \frac{dq}{V^n}$],
transforms itself into this

$$\frac{dq}{V^n} + \frac{qqdV}{V^{2n}} + mmdV = 0$$

or

$$dq + \frac{qqdV}{V^n} + mmV^n dV = 0.$$

Further putting $V^{n-1} = \frac{1}{r}$, to have

$$r = \frac{1}{V^{n-1}} \text{ and } -\frac{(n-1)dV}{V^n} = dr,$$

and since

$$V = r^{\frac{-1}{n-1}}, \text{ thus } V^{2n} = r^{\frac{-2n}{n-1}},$$

we will have

$$-(n-1)V^n dV = r^{\frac{-2n}{n-1}} dr.$$

and finally our equation will take this form

$$dq - \frac{qqdr}{n-1} - \frac{mm}{n-1} r^{\frac{-2n}{n-1}} dr = 0,$$

which is the same as that proposed by Count Ricatti in former times.

8. From that it is clear, if one takes $n = 3$, for the case of air of two dimensions, that one will have

$$dq - \frac{1}{2}qqdr - \frac{mm}{2}r^{-3}dr = 0,$$

this is one of the irreducible cases of Riccati's equation; and this reason makes me despair that one will ever determine the propagation of sound, unless one supposes the air to be according to a straight line. But, putting $n = 4$, this equation becoming

$$dq - \frac{1}{3}qqdr - \frac{mm}{3}r^{-\frac{8}{3}}dr = 0,$$

is one of the reducible cases of Riccati's equation, which changes completely the kind of the equation which we have to resolve and lets us hope that the case of three dimensions, which we are giving to the extension of the air, may admit a solution, though that of two dimensions was not susceptible.

9. In order to find the reducible integral equation in this case, it is good to consider the second order differential equation

$$mmPdV^2 + \frac{ndVdP}{V} + ddP = 0,$$

which it is necessary to transform by supposing

$$\frac{dP}{P} = QdV + \frac{dp}{p},$$

where Q is a certain function of V, which it is necessary to determine in order that the integral or the value of p may be able to be developed conveniently in a series. Having therefore, on account of constant dV, on differentiation,

$$\frac{ddP}{P} - \frac{dP^2}{P^2} = dQdV + \frac{ddp}{p} - \frac{dp^2}{p^2}.$$

Now

$$\frac{dP^2}{P^2} = QQdV^2 + \frac{2QdVdp}{p} + \frac{dp^2}{pp},$$

thus

$$\frac{ddP}{P} = QQdV^2 + \frac{2QdVdp}{p} + dQdV + \frac{ddp}{p},$$

from which we derive this equation

$$mmdV^2+\frac{nQdV^2}{V}+\frac{ndVdp}{Vp}+\frac{ddp}{p}$$
$$+QQdV^2+dQdV+\frac{2QdVdp}{p}=0.$$

Where it will be necessary to ensure that the variable V has either no dimension or a single everywhere.

10. Now putting

$$Q=m\sqrt{-1}+\frac{\lambda}{V},$$

so that

$$dQ=-\frac{\lambda dV}{VV},$$

to have

$$2\lambda m\sqrt{-1}\cdot\frac{dV^2}{V}+\frac{\lambda\lambda dV^2}{V^2}+\frac{ndVdp}{Vp}+2m\sqrt{-1}\cdot\frac{dVdp}{p}$$
$$+\frac{ddp}{p}+mn\sqrt{-1}\cdot\frac{dV^2}{V}+\frac{\lambda ndV^2}{V^2}+\frac{2\lambda dVdp}{Vp}-\frac{\lambda dV^2}{V^2}=0.$$

In addition let $\lambda=-n+1$, so that this more simple form is obtained :

$$-\frac{(n-2)mdV^2\sqrt{-1}}{V}-\frac{(n-2)dVdp}{Vp}+\frac{2mdVdp\sqrt{-1}}{p}+\frac{ddp}{p}=0.$$

or rather, on multiplying that by Vp, this form

$$Vddp+2mdVdp\sqrt{-1}-(n-2)dVdp-(n-2)mpdV^2\sqrt{-1}=0,$$

of which one looks for the value of p by a series.

11. Assuming

$$p=A+BV+CV^2+DV^3+EV^4+\text{etc.},$$

and the substitution will give

$$\frac{Vddp}{dV^2} = +\ 1\cdot 2CV + 2\cdot 3DV^2 + 3\cdot 4EV^3 + 4\cdot 5FV^4 + \text{etc.},$$
$$+\frac{2mdVdp\sqrt{-1}}{dV} = +2mBV\sqrt{-1} + 4mCV^2\sqrt{-1} + 6mDV^3\sqrt{-1} + 8mEV^4\sqrt{-1} + \text{etc.},$$
$$-\frac{(n-2)dp}{dV} = -(n-2)B - 2(n-2)CV - 3(n-2)DV^2 - 4(n-2)EV^3 - 5(n-2)FV^4 - \text{etc.},$$
$$-(n-2)mp\sqrt{-1} = -(n-2)mA\sqrt{-1} - (n-2)mBV\sqrt{-1} - (n-2)mCV^2\sqrt{-1}$$
$$-(n-2)mDV^3\sqrt{-1} - (n-2)mEV^4\sqrt{-1} - \text{etc.}$$

These series taken together must become $=0$, giving the following determinations

$$\begin{array}{r|l}
B + mA\sqrt{-1} = 0 & B = -\dfrac{mA\sqrt{-1}}{1} \\
2(n-3)C + (n-4)mB\sqrt{-1} = 0 & C = -\dfrac{(n-4)mB\sqrt{-1}}{2(n-3)} \\
3(n-4)D + (n-6)mC\sqrt{-1} = 0 & D = -\dfrac{(n-6)mC\sqrt{-1}}{3(n-4)} \\
4(n-5)E + (n-8)mD\sqrt{-1} = 0 & E = -\dfrac{(n-8)mD\sqrt{-1}}{4(n-5)} \\
5(n-6)F + (n-10)mE\sqrt{-1} = 0 & \quad \text{etc.}
\end{array}$$

from which one sees that this series becomes finite for the cases

$$n=4,\ n=6,\ n=8,\ n=10\ \text{etc.}$$

12. Thus, for our case, where $n=4$, we will have

$$B = -mA\sqrt{-1}, \quad C=0, \quad D=0\ \text{etc.}$$

and thus

$$p = A - mA\sqrt{-1}, \quad \text{thus} \quad Q = m\sqrt{-1} - \frac{3}{V}$$

and

$$\int QdV = mV\sqrt{-1} - 3lV.$$

Now, having put

$$\frac{dP}{P} = QdV + \frac{dp}{p},$$

we will have on integrating

$$lP = mV\sqrt{-1} - 3lV + lp$$

or

$$P = \frac{Ae^{mV\sqrt{-1}}(1 - mV\sqrt{-1})}{V^3}.$$

Now, since one can also take $\sqrt{-1}$ negative as well, we will have also

$$P = \frac{Be^{-mV\sqrt{-1}}(1 + mV\sqrt{-1})}{V^3}.$$

and because in our equation :

$$P = \frac{Ae^{mV\sqrt{-1}}(1 - mV\sqrt{-1})}{V^3} + \frac{Be^{-mV\sqrt{-1}}(1 + mV\sqrt{-1})}{V^3}.$$

P only has as single value [see§ 6], these two values combined

$$P = \frac{Ae^{mV\sqrt{-1}}(1 - mV\sqrt{-1})}{V^3}$$

in giving the complete integral.

13. It is necessary now only to take the constants A and B so that the imaginary quantities cancel each other out. For this outcome it is necessary to note that

$$e^{mV\sqrt{-1}} = \cos mV + \sqrt{-1} \cdot \sin mV$$

and

$$e^{-mV\sqrt{-1}} = \cos mV - \sqrt{-1} \cdot \sin mV$$

and we have at last

$$PV^3 = A(1 - mV\sqrt{-1})\ (\cos mV + \sqrt{-1} \cdot \sin mV) + B\left(1 + mV\sqrt{-1}\right)(\cos mV - \sqrt{-1} \cdot \sin mV)$$

or

$$\begin{aligned} PV^3 &= (A+B)\cos mV + (A-B)\sqrt{-1} \cdot \sin mV \\ &\quad - mV(A-B)\sqrt{-1} \cdot \cos mV + mV(A+B)\sin mV. \end{aligned}$$

Thus let

$$A + B = C \ \text{ and } \ (A-B)\sqrt{-1} = D,$$

in order to have this real expression :

$$PV^3 = C\cos mV + D\sin mV - mDV\cos mV + mCV\sin mV :$$

in addition let

$$C = E\sin\zeta \text{ and } D = E\cos\zeta ,$$

to make this equation simpler :

$$PV^3 = E\sin(mV+\zeta) - mEV\cos(mV+\zeta)$$

or

$$P = \frac{E\sin(mV+\zeta)}{V^3} - \frac{mE\cos(mV+\zeta)}{V^2}.$$

14. Now we have put [as in § 6]

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh} = mm ,$$

from which it follows that $\alpha = m\sqrt{2gh}$, and from that, because $s = P\sin(at+\mathfrak{A})$, we will have

$$s = \frac{E\sin(mV+\zeta)\sin(mt\sqrt{2gh}+\mathfrak{A})}{V^3} - \frac{mE\cos(mV+\zeta)\sin(mt\sqrt{2gh}+\mathfrak{A})}{V^2},$$

where the quantities $E,\ m,\ \zeta,\ \mathfrak{A}$ are completely arbitrary, of the kind that one can give an infinitude of similar formulas, thus not only each separately but also all together satisfy our equation equally [§ 4]

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{4}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right);$$

and for the first equation

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = -\frac{2u}{VV} + \frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right)$$

we will have

$$s = \frac{E\sin(mV+\zeta)\sin(mt\sqrt{2gh}+\mathfrak{A})}{VV} - \frac{mE\cos(mV+\zeta)\sin(mt\sqrt{2gh}+\mathfrak{A})}{V},$$

or from an assembly of as many similar formulas as on would wish.

15. Now, all this is not yet of any help for our purpose, which requires absolutely arbitrary functions, which can even be discontinuous. But the consideration of these forms gave me the idea that our equation could be solved by such an expression as :

$$u = \frac{A}{V^2}\Phi:(V + t\sqrt{2gh}) + \frac{B}{V}\Phi':(V + t\sqrt{2gh}),$$

where Φ indicates one such function, and the function Φ' depends on that according to

$$d.\,\Phi:z = dz\ \Phi':z\,;$$

in the same way I put

$$d.\,\Phi':z = dz\ \Phi'':z \qquad d.\,\Phi'':z = dz\ \Phi''':z \ \text{ etc.}$$

Now with that in place we derive [recall that the bracket denotes a partial derivative]

$$\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = +\frac{2ghA}{V^2}\Phi'':(V + t\sqrt{2gh}) + \frac{2ghB}{V}\Phi''':(V + t\sqrt{2gh}),$$

$$\left(\frac{ddu}{dV^2}\right) = -\frac{2A}{V^3}\Phi\cdots + \frac{A}{V^2}\Phi'\cdots + \frac{B}{V}\Phi'',$$

$$-\frac{B}{V^2}\Phi'\cdots$$

$$\left(\frac{du}{dV}\right) = \quad \frac{6A}{V^4}\Phi\cdots - \frac{4A}{V^3}\Phi'\cdots + \frac{A}{V^2}\Phi''\cdots + \frac{B}{V}\Phi'''\cdots$$

$$+\frac{2B}{V^3}\Phi'\cdots - \frac{2B}{V^2}\Phi''\cdots$$

16. Substituting these values into our equation

$$0 = -\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) - \frac{2u}{VV} + \frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right)$$

and we will have

$$\begin{aligned} 0 = \frac{6A}{V^4}\Phi\cdots &+ \frac{2B-4A}{V^3}\Phi'\cdots + \frac{A-2B}{V^2}\Phi''\cdots + \frac{B}{V}\Phi'''\cdots, \\ -\frac{4A}{V^4}\Phi\cdots &+ \frac{2A-2B}{V^3}\Phi'\cdots \qquad + \frac{2B}{V^2}\Phi''\cdots \\ -\frac{2A}{V^4}\Phi\cdots &\qquad - \frac{4B}{V^3}\Phi'\cdots \qquad - \frac{A}{V^2}\Phi''\cdots - \frac{B}{V}\Phi'''\cdots \end{aligned}$$

which reduces to

$$\frac{-2A-2B}{V^3}\Phi'\cdots=0$$

and thus $B=-A$, so that our integral shall be

$$u=\frac{A}{V^2}\Phi:(V+t\sqrt{2gh})-\frac{A}{V}\Phi':(V+t\sqrt{2gh}),$$

which is infinitely more general than that which we have found above expressed by sines and cosines.

17. One also can take the sign of the root $\sqrt{2gh}$ negative, and obtain

$$u=\frac{A}{V^2}\Phi:(V-t\sqrt{2gh})-\frac{A}{V}\Phi':(V-t\sqrt{2gh})$$

and this formula added to that preceding will give the complete integral of our formula. But since by hypothesis these disturbances spread in all directions equally, this latter formula will suffice alone since we do not consider *V* to be negative. Hence, with any function taken for Φ, one will know the quantity *u* for each time proposed *t* of which any one spherical layer, the radius of which $AV=V$ will be expanding. Also one will know the speed that this layer will be moving further away from the center *A* ; this speed will be

$$\left(\frac{du}{dt}\right)=-\frac{\sqrt{2gh}A}{VV}\Phi':(V-t\sqrt{2gh})+\frac{A\sqrt{2gh}}{V}\Phi'':(V-t\sqrt{2gh}).$$

Now, for the initial state, when $t=0$, one will have

$$u=\frac{A}{VV}\Phi:V-\frac{A}{V}\Phi':V\ ;$$

and for the speed

$$\left(\frac{du}{dt}\right)=-\frac{A\sqrt{2gh}}{VV}\Phi':V+\frac{A\sqrt{2gh}}{V}\Phi'':V.$$

18. Since it is necessary to consider that at the commencement all the disturbance must be enclosed in a small space around the centre *A*, the nature of the function Φ must be such, that these three expressions $\Phi : z, \Phi' : z, \Phi'' : z$ must be vanishing always as soon as z surpasses a given small quantity.

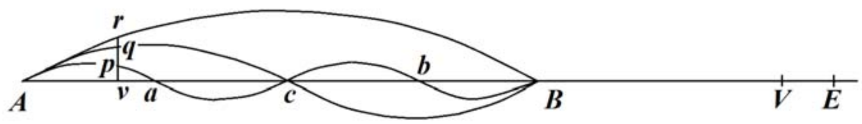

Fig. 2.

For this outcome, one describes (Fig. 2) some curve *Apa* on the axis *AE*, that one must draw again three times alternately above and below the axis, in order to have the curve *ApacbB*, of which the applied line *vp*, corresponding to some one abscissa $Av = z$, shall be $= \Phi'' : z$. Next, one draws another curve *AqcB* the quadrature of that, of the kind that the applied line shall be

$$vq = \frac{ar \cdot Avp}{c},$$

and one has

$$vq = \frac{1}{c}\Phi' : z,$$

since $\Phi' : z = \int dz \Phi'' : z$. Then, one draws the third curve *ArB* the quadrature of that, the applied line of which shall be

$$vr = \frac{ar \cdot Avq}{c}, \text{ or } vr = \frac{1}{cc}\Phi : z$$

of the kind that for these three curves on will have

$$\Phi : z = cc \cdot vr, \quad \Phi' : z = c \cdot vq, \quad \Phi'' : z = vp.$$

[Note : the ratios *vq : ar* and *vr : ar* can be thought of as a rough way of shaping the pulses relating to their slope, while *c* is a convenient constant.]

19. Then, for the initial state, taking the abscissa *Av* equal to a radius of the spherical layer for which one looks for the displacement, or $Av = V$, one will have the displacement

$$u = \frac{Acc}{VV} \cdot vr - \frac{Ac}{V} \cdot vq$$

and the speed

$$\left(\frac{du}{dt}\right)=-\frac{Ac\sqrt{2gh}}{VV}\cdot vq+\frac{A\sqrt{2gh}}{V}\cdot vp$$

from which one knows the initial disturbance, and one understands that, from that being given, one will be able to derive the construction of an arbitrary curve *Apa* reciprocally from that. However, it matters little to known the nature of this disturbance, since our purpose tends mainly to determine the propagation. Besides one would be able to describe also similar curves derived from the functions of $V+t\sqrt{2gh}$, that can be combined with these. But one will see soon that the speed of propagation is not changed and remains the same, whatever the curve taken for *Apa*. For this reason I will stop at the curve I have just mentioned.
[Which is rather a pity, as the diagram can be viewed as a decomposition of the pulse into its frequencies or wavelengths, a short step from Fourier analysis.]

20. I must note also that, although the members of our formulas must be divisible by *V* and *VV*, however they cannot become infinite for the case $V=0$, provided that the first curve *Apa* makes an acute angle with the axis. For, putting
$Av=V,\ vp=p,\ vq=q$ and $vr=r$, for the beginning let there be $p=nV$, where *n* is some finite number, and one will have

$$q=\frac{nVV}{2c} \text{ and } r=\frac{nV^3}{6cc},$$

from that, if the abscissa *V* is extremely small, one will have

$$u=\tfrac{1}{6}nAV-\tfrac{1}{2}n.AV=-\tfrac{1}{3}nAV$$

and

$$\left(\frac{du}{dt}\right)=-\tfrac{1}{2}nA\sqrt{2gh}+nA\sqrt{2gh}=+\tfrac{1}{2}nA\sqrt{2gh},$$

of such a kind that the displacement from the centre *A* shall be also infinitely small, and if one wishes the speed to vanish as well, only by taking $n=0$ or by making the curve *Apa* touch the axis in some way at *A*.

21. Now taking some point *V* outside the initial disturbance, one sees that at the start, when $t=0$, both the displacement *u* as well as the speed $\left(\frac{du}{dt}\right)$ shall be zero. For, if $V>AB$, all these functions $\Phi:V$, $\Phi':V$, and $\Phi'':V$ vanish, since all the three curves are agreed to be united with the axis beyond the point *B*. But, after the first instant, as soon as the quantity $V-t\sqrt{2gh}$ begins to become smaller than *AB*, the layer which passes through *V* will become disturbed. Then taking $Vv=t\sqrt{2gh}$, there will be for the displacement of this layer:

$$u = \frac{Acc}{VV} \cdot vr - \frac{Ac}{V} \cdot vq\,;$$

and for the speed:

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = -\frac{Ac\sqrt{2gh}}{VV} \cdot vq + \frac{A\sqrt{2gh}}{V} \cdot vp\,,$$

from which it can be seen that, the further the point *V* is distant from the centre *A*, also the smaller will be both its displacement as well as its speed, and this very close to the axis if the distance *V* is very great.

22. It can be considered that the disturbances expanding out in the air must diminish on account of the squares of the distances, and it is surprising to see that the small distances through which the layers move forwards diminish only on account of the distances, where the distances are very great. But it must be observed that the disturbance of each layer does not depend uniquely on its displacement *u*, but also on the speed during which it is disturbed ; and that also being inversely proportional to the distance from the centre, where the whole disturbance must be considered to be much smaller. Moreover, if the strength of the sound, as such as it is perceived, depends only on the displacement of the particles of the air or on their speed alone, one can say that the strength of a sound diminished on account of the distances; but, if it depends on these effects jointly, it will follow the inverse square of the distances.

23. Putting the distance $AB = a$, which is the radius of the sphere which will have been excited originally, and this disturbance will be transmitted as far as *V*, the distance *AV* being $= V$, after the time *t*, so that $V - t\sqrt{2gh} = AB = a$, from which one derives

$$t = \frac{V-a}{\sqrt{2gh}}\,;$$

or rather, in one second the disturbance will be sent through a distance of $V = a + \sqrt{2gh}$, which is much greater than the quantity *a* which we have found for that in the hypothesis of a single dimension, even though this same increase equally will be present there. But this will not be suffice in any manner to obtain the speed that one knows from experience, and therefore there will be no doubt that the strength of the disturbance produces this acceleration, as long as extremely weak sounds shall be in accordance with our formula, which, as I have noticed first, can be considered only where these disturbances are infinitely small.

24. Now, the complete integral of our equation being

$$u=\frac{A}{V^2}\Phi:(V+t\sqrt{2gh})-\frac{A}{V}\Phi':(V+t\sqrt{2gh})$$
$$+\frac{B}{V^2}\Psi:(V-t\sqrt{2gh})-\frac{B}{V}\Psi':(V-t\sqrt{2gh}),$$

one can change the initial disturbance by a very small amount, not only in relation to the displacement of each spherical layer, but also in relation to the speed which will be impressed on them, since one will have in general for the speed :

$$\left(\frac{du}{dt}\right)=\frac{A\sqrt{2gh}}{VV}\Phi':(V+t\sqrt{2gh})-\frac{A\sqrt{2gh}}{V}\Phi'':(V+t\sqrt{2gh})$$
$$-\frac{B\sqrt{2gh}}{VV}\Psi':(V-t\sqrt{2gh})+\frac{B\sqrt{2gh}}{V}\Psi'':(V-t\sqrt{2gh}),$$

from which one will have the general state, on putting $t=0$,

$$u=\frac{A}{V^2}\Phi:V-\frac{A}{V}\Phi':V+\frac{B}{V^2}\Psi:V-\frac{B}{V}\Psi':V$$

and

$$\left(\frac{du}{dt}\right)=\frac{A\sqrt{2gh}}{VV}\Phi':V-\frac{A\sqrt{2gh}}{V}\Phi'':V-\frac{B\sqrt{2gh}}{VV}\Psi':V+\frac{B\sqrt{2gh}}{V}\Psi'':V,$$

where the characters Φ and Ψ indicate certain functions, both continuous as well as discontinuous, which we have put into the state to give a general solution, in accordance with some initial disturbance.

25. One can also assume $B=A$, since the variation of the functions Φ and Ψ includes this difference already, and for which one can apply some single initial disturbance, putting

$$\Phi:V+\Psi:V=\Sigma:V \quad\text{and}\quad \Phi:\mathrm{V}-\Psi:V=\Theta:V\ ,$$

so that

$$\Phi:V=\tfrac{1}{2}\Sigma:V+\tfrac{1}{2}\Theta:V \quad\text{and}\quad \Psi:V=\tfrac{1}{2}\Sigma:V-\tfrac{1}{2}\Theta:V\ ,$$

and we will have for the initial state :

$$u=\frac{A}{V^2}\Sigma:V-\frac{A}{V}\Sigma':V$$

and

$$\left(\frac{du}{dt}\right)=\frac{A\sqrt{2gh}}{VV}\Theta':V-\frac{A\sqrt{2gh}}{V}\Theta'':V.$$

Now, putting this same state to be :

$$u=AP \text{ and } \left(\frac{du}{dt}\right)=AQ\sqrt{2gh},$$

so that P and Q shall be given functions of V agreeing with the initial disturbance, and it is necessary to find the functions Σ and Θ equal to these:

$$\Sigma:V-V\Sigma':V=V^2P \text{ and } \Theta':V-V\Theta'':V=V^2Q.$$

26. To do this putting

$$\Sigma:V=p \text{ and } \Theta':V=q,$$

to have

$$p-\frac{Vdp}{dV}=V^2P \text{ and } q-\frac{Vdq}{dV}=V^2Q$$

or indeed

$$\frac{pdV-Vdp}{VV}=PdV \text{ and } \frac{qdV-Vdq}{VV}=QdV,$$

from which it can be deduced that

$$-\frac{p}{V}=\int PdV \text{ and } -\frac{q}{V}=\int QdV.$$

Then, knowing the functions P and Q from the initial disturbance, we can form our functions of the kind

$$\Sigma:V=-V\int PdV \text{ and } \Theta':V=-V\int QdV,$$

thus

$$\Theta:V=-\int VdV\int QdV$$

and then

$$\Sigma':V=-\int PdV-VP \text{ and } \Theta'':V=-\int QdV-VQ,$$

from which curves can be traced readily, the applied lines of which represent all the functions that we need in this investigation.

27. After having determined the nature of these functions impressed by the disturbance at the start, for any time t the enlargement u can be assumed of all the spherical layers of which the radius is assumed to be $=V$. One will have for u the following expression :

$$u=\begin{cases} +\dfrac{A}{2VV}\Sigma:(V+t\sqrt{2gh})+\dfrac{A}{2VV}\Theta:(V+t\sqrt{2gh}) \\ +\dfrac{A}{2VV}\Sigma:(V-t\sqrt{2gh})-\dfrac{A}{2VV}\Theta:(V-t\sqrt{2gh}) \\ -\dfrac{A}{2V}\Sigma':(V+t\sqrt{2gh})-\dfrac{A}{2V}\Theta':(V+t\sqrt{2gh}) \\ -\dfrac{A}{2V}\Sigma':(V-t\sqrt{2gh})+\dfrac{A}{2V}\Theta':(V-t\sqrt{2gh}) \end{cases}$$

from which we see as before that, during one second, the sound can only be considered to be transmitted in one second through a distance $=\sqrt{2gh}$, but yet with the restriction that the sound be extremely weak ; for louder sounds nothing can be concluded.

28. This propagation by concentric layers furnishes us with an infinitude of particular solutions of the general formulas which I have found for any disturbances in the air (see § 43 of the preceding memoir):

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddx}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddy}{dXdY}\right)+\left(\frac{ddz}{dXdZ}\right),$$
$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddx}{dXdY}\right)+\left(\frac{ddy}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddz}{dYdZ}\right),$$
$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddx}{dXdZ}\right)+\left(\frac{ddy}{dYdZ}\right)+\left(\frac{ddz}{dZ^2}\right),$$

Because, in order to have some particular solution, consider the preceding centre of the disturbances at a point determined by the coordinates a, b, c,
and we will have

$$V=\sqrt{((X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2)}$$

and then

$$x=\frac{X-a}{V}\cdot u,\quad y=\frac{Y-b}{V}\cdot u,\quad z=\frac{Z-c}{V}\cdot u.$$

29. Then taking any three constants for a, b, c, to abbreviate let there be

$$\sqrt{((X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2)}=V,$$

and the characters Φ and Ψ indicate some regular or irregular functions, from which by differentiation one will have the derived functions Φ' and Ψ', and taking the displacement

$$u = \frac{A}{V^2}\Phi:(V+t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V}\Phi':(V+t\sqrt{2gh})$$
$$+\frac{B}{V^2}\Psi:(V-t\sqrt{2gh}) - \frac{B}{V}\Psi':(V-t\sqrt{2gh}).$$

Then one will have for the resolution of our three formulas the following values of the three variables *x*, *y*, *z* sought :

$$x = \frac{X-a}{V}\cdot u,\quad y = \frac{Y-b}{V}\cdot u,\quad z = \frac{Z-c}{V}\cdot u$$

and in changing the constants *a*, *b*, *c* at will on will obtain an infinitude of similar values for *x*, *y*, *z*, which taken together, will give a general enough solution of our problem.

30. This solution serves to help us understand, if there shall be several centres of disturbance, the propagation from each is made in the same manner as if it was all alone in the air. Therefore, if several sounds are excited in different parts of the air, each expands by spherical and concentric layers as if it existed all alone in the air, and all the others are not disturbed by the propagation, and it happens that the same particles of air are disturbed at the same time by several sounds, their movement will be composed from all the movements which each sound will produce there separately; this is because the propagation of each is not disturbed by the others. The explanation of this phenomena, which we owe uniquely to the theory, is without doubt very important.
[This is a clear statement of the superposition principle for waves.]

31. Before finishing this matter, I will propose still another method of treating the three main equations reported in § 28, which consists in the elimination of the time *t*. For this to be done, let us put

$$x = p\sin(\alpha t+\beta),\quad y = q\sin(\alpha t+\beta),\ z = r\sin(\alpha t+\beta),$$

where *p*, *q*, *r* shall be functions of the three variables *X*, *Y* and *Z*, without including the time *t*. Then, after making the substitution, one will have the three following equations, from which it is necessary to determine the three unknowns *p*, *q*, *r*:

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}p+\left(\frac{ddp}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddq}{dXdY}\right)+\left(\frac{ddr}{dXdZ}\right)=0,$$
$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}q+\left(\frac{ddp}{dXdY}\right)+\left(\frac{ddq}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddr}{dYdZ}\right)=0,$$
$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}r+\left(\frac{ddp}{dXdZ}\right)+\left(\frac{ddq}{dYdZ}\right)+\left(\frac{ddr}{dZ^2}\right)=0,$$

32. If we put

$$\left(\frac{dp}{dX}\right)+\left(\frac{dq}{dY}\right)+\left(\frac{dr}{dZ}\right)=v\,,$$

we will have

$$p=-\frac{2gh}{\alpha\alpha}\left(\frac{dv}{dX}\right),\quad q=-\frac{2gh}{\alpha\alpha}\left(\frac{dv}{dY}\right),\quad r=-\frac{2gh}{\alpha\alpha}\left(\frac{dv}{dZ}\right),$$

from which it is evident that

$$\left(\frac{dp}{dY}\right)=\left(\frac{dq}{dX}\right),\quad \left(\frac{dp}{dZ}\right)=\left(\frac{dr}{dX}\right),\quad \left(\frac{dq}{dZ}\right)=\left(\frac{dr}{dY}\right).$$

or that the formula

$$pdX+qdY+rdZ$$

is integrable, the integral being

$$=-\frac{2gh}{\alpha\alpha}v=-\frac{2gh}{\alpha\alpha}\left(\left(\frac{dp}{dX}\right)+\left(\frac{dq}{dY}\right)+\left(\frac{dr}{dZ}\right)\right).$$

Now, from that we conclude further :

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}p+\left(\frac{ddp}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddq}{dXdY}\right)+\left(\frac{ddr}{dXdZ}\right)=0,$$
$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}q+\left(\frac{ddq}{dXdY}\right)+\left(\frac{ddq}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddq}{dYdZ}\right)=0,$$
$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}r+\left(\frac{ddr}{dXdZ}\right)+\left(\frac{ddr}{dYdZ}\right)+\left(\frac{ddr}{dZ^2}\right)=0,$$

on account of which all the three quantities p, q, r are determined by the same equation, of which it is required to find the general solution.

ANOTHER WAY OF ARRIVING AT THE SOLUTION

33. The explanation of the propagation of sound which I have just found can be deduced at once from our principle formulas, which, putting

$$\left(\frac{dx}{dX}\right)+\left(\frac{dy}{dY}\right)+\left(\frac{dz}{dZ}\right)=v\,,$$

are

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{dv}{dX}\right),\quad \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{dv}{dY}\right),\quad \left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{dv}{dZ}\right),$$

from which we derive this equation for finding v

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddv}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddv}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddv}{dZ^2}\right),$$

as I have shown in my preceding memoir, § 43. Now, if there is put

$$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=VV,$$

where some constant quantities can be taken for a, b, c, this equation is satisfied by this formula

$$v=\frac{A}{V}\Phi:(V\pm t\sqrt{2gh}),$$

as can be seen on making the substitution.

34. Because, since V does not depend at all on the time t, there will be

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right)=\frac{2Agh}{V}\Phi'':(V\pm t\sqrt{2gh})\,;$$

then , because

$$\left(\frac{dV}{dX}\right)=\frac{X-a}{V},\quad \left(\frac{dV}{dY}\right)=\frac{Y-b}{V},\quad \left(\frac{dV}{dZ}\right)=\frac{Z-c}{V},$$

there is

$$\left(\frac{dV}{dX}\right)=-\frac{A\left(X-a\right)}{V^3}\Phi:(V\pm t\sqrt{2gh})+\frac{A\left(X-a\right)}{V^2}\Phi':(V\pm t\sqrt{2gh}),$$

and on differentiating again :

$$\left(\frac{ddv}{dX^2}\right)=-\frac{A}{V^3}\Phi:(V\pm t\sqrt{2gh})-\frac{3A\left(X-a\right)^2}{V^4}\Phi':(V\pm t\sqrt{2gh})$$
$$+\frac{A\left(X-a\right)^2}{V^3}\Phi'':(V\pm t\sqrt{2gh})+\frac{3A\left(X-a\right)^2}{V^5}\Phi:(V\pm t\sqrt{2gh})+\frac{A}{V^2}\Phi':(V\pm t\sqrt{2gh}),$$

from which the values of the formulas $\left(\frac{ddv}{dY^2}\right)$ and $\left(\frac{ddv}{dZ^2}\right)$ can be formed easily, and taking the sum of the three formulas, since

$$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=V^2,$$

it reduces to

$$\frac{A}{V}\Phi'':(V\pm t\sqrt{2gh})\,;$$

and this same value is also that of $\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right)$, from which it can be seen that

$$v=\frac{A}{V}\Phi:(V\pm t\sqrt{2gh})$$

satisfies perfectly the equation derived above.

35. In order to find from that the quantities *x*, *y*, *z*, giving this form to the value found for *v*

$$v=\frac{A}{V}\Phi'':(V+t\sqrt{2gh}),$$

from which we have

$$\left(\frac{dv}{dX}\right)=-\frac{A\left(X-a\right)}{V^3}\Phi'':(V+t\sqrt{2gh})+\frac{A\left(X-a\right)}{V^2}\Phi''':(V+t\sqrt{2gh}),$$

which is also the value of $\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$. Then taking the integrals considering only the time *t* variable and, since

$$\int dt\,\Phi''':(V+t\sqrt{2gh})=\frac{1}{\sqrt{2gh}}\Phi'':(V+t\sqrt{2gh}),$$

we will obtain

$$\frac{1}{\sqrt{2gh}}\left(\frac{dx}{dt}\right)=-\frac{A(X-a)}{V^3}\Phi':(V+t\sqrt{2gh})+\frac{A(X-a)}{V^2}\Phi'':(V+t\sqrt{2gh})+\frac{P}{\sqrt{2gh}},$$

where P is some function of X, Y et Z, that one can consider here as constant, and on integrating again,

$$x=-\frac{A(X-a)}{V^3}\Phi:(V+t\sqrt{2gh})+\frac{A(X-a)}{V^2}\Phi':(V+t\sqrt{2gh})+Pt+\mathfrak{P},$$

where $\mathfrak{P}$ also is some function of X, Y and Z.

36. In the same manner it can be shown that

$$y=-\frac{A(Y-b)}{V^3}\Phi:(V+t\sqrt{2gh})+\frac{A(Y-b)}{V^2}\Phi':(V+t\sqrt{2gh})+Qt+\mathfrak{Q},$$
$$z=-\frac{A(Z-c)}{V^3}\Phi:(V+t\sqrt{2gh})+\frac{A(Z-c)}{V^2}\Phi':(V+t\sqrt{2gh})+Rt+\mathfrak{R},$$

where Q, R and $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ are also functions of the three variables X, Y, Z, which depend in the same manner as the preceding P and $\mathfrak{P}$:

$$\left(\frac{ddP}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddQ}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddR}{dZ^2}\right)=0$$

and

$$\left(\frac{dd\mathfrak{P}}{dX^2}\right)+\left(\frac{dd\mathfrak{Q}}{dY^2}\right)+\left(\frac{dd\mathfrak{R}}{dZ^2}\right)=0.$$

But for our purpose we may ignore all these functions P, Q, R and $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, or consider them equal to 0.

37. Then, if only the fixed points c, c', c'' etc. are considered in the air (Fig. 3) as wished, determined by the coordinates

$$Aa=a,\ ab=b,\ bc=c;\ Aa'=a',\ a'b'=b',\ b'c'=c' \text{ etc.},$$

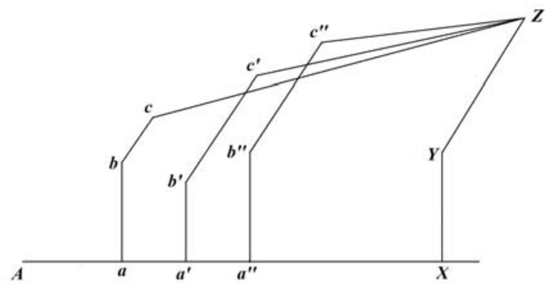

Fig. 3.

and after that to derive some point *Z*, determined by the coordinates $AX = X,\ XY = Y$ and $YZ = Z$, the straight lines *Zc*, *Zc'*, *Zc''*, by which one calls the distance

$$Zc = V,\ Zc' = V',\ Zc'' = V''$$

and to abbreviate by putting

$$-\frac{1}{V}\Sigma : (V - t\sqrt{2gh}) + \Sigma' : (V - t\sqrt{2gh}) = P,$$
$$-\frac{1}{V'}\Psi : (V' + t\sqrt{2gh}) + \Psi' : (V + t\sqrt{2gh})$$
$$-\frac{1}{V'}\Theta : (V' - t\sqrt{2gh}) + \Theta' : (V - t\sqrt{2gh}) = Q,$$
$$-\frac{1}{V''}\Omega : (V'' - t\sqrt{2gh}) + \Omega' : (V'' + t\sqrt{2gh})$$
$$-\frac{1}{V'''}\Xi : (V''' - t\sqrt{2gh}) + \Xi' : (V''' - t\sqrt{2gh}) = R,$$

the derangements of the point *Z* will be expressed by the following equations :

$$x = \frac{(X-a)P}{VV} + \frac{(X-a')}{V'V'} + \frac{(X-a'')R}{V''V''},$$
$$y = \frac{(Y-b)P}{VV} + \frac{(Y-b')}{V'V'} + \frac{(Y-b'')R}{V''V''},$$
$$z = \frac{(Z-c)P}{VV} + \frac{(Z-c')}{V'V'} + \frac{(Z-c'')R}{V''V''}.$$

38. These same formulas express the initial state, when on puts $t = 0$, and that being done ; from that one will know the nature of the functions Φ, Σ, Ψ, Ω, Ξ. Considering these functions such that, on putting $t = 0$, the quantities *P*, *Q*, *R* shall be equal to zero always, except in these cases where the distances *V*, *V'*, *V''* are almost equal to the quantities *D*, *D'*, *D''*, and then the point *Z* will be at rest, at least it will have

$$\text{either } V - t\sqrt{2gh} = D, \quad \text{or } V' - t\sqrt{2gh} = D', \quad \text{or } V'' - t\sqrt{2gh} = D'',$$

from which it can be seen that the original disturbances around the points *c*, *c'*, *c''* are sent separately to the point *Z* and each in the same manner as if the others did not exist. And therefore it is clear that all the disturbances do not disturb each other.

[And so the ideas of phase differences, interference, etc. between sources lies hidden still.]

CONTINUATION DES RECHERCHES SUR LA PROPAGATION DU SON

Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [15] (1769), 1766, p. 241-264

1. Dans les deux Mémoires précédens sur cette matiere j'ai suffisamment fait sentir, combien il seroit important, si l'on pouvoit déterminer par la théorie la propagation du son en considérant l'air étendu en tout sens; et qu'on pût réussir dans cette hypothese aussi bien que dans celle où l'on ne supposoit à l'air qu'une seule dimension selon une ligne droite. Après avoir expliqué la propagation du son dans cette hypothese d'une seule dimension, dans mon premier Mémoire sur cette matiere, j'ai tâché de traiter ce même sujet dans le supplément, en supposant d'abord à l'air deux dimensions suivant un plan et ensuite en introduisant dans le calcul toutes les trois dimensions. J'ai aussi réussi à trouver des formules analytiques qui contiennent tous les mouvemens possibles dont l'air est susceptible; mais l'application à la question proposée me parut trop difficile, pour que j'en eusse osé espérer un heureux succès.

2. Quand je considérai seulement deux dimensions, j'avois bien appliqué les formules trouvées au cas où la premiere agitation se fait quasi dans un point, d'où les ébranlemens se répandent ensuite par des cercles concentriques partout également, puisque c'est en particulier le cas de la propagation du son. Mais la formule que j'y ai trouvée est assujettie à des difficultés si grandes, que je n'ai vu aucun moyen pour les surmonter; et ayant fait la même application dans l'hypothese de trois dimensions, je pouvois d'autant moins espérer qu'il me seroit possible de développer la formule qui détermine les ébranlemens répandus en tout sens d'un point fixe par des surfaces sphériques concentriques.

3. Cependant c'est précisément ici, comme je l'ai remarqué depuis, que les difficultés ne sont pas invincibles; et c'est là qu'a lieu un cas semblable à ceux que le Comte Riccati a proposés autrefois, où une certaine equation devient intégrable, pendant qu'en général elle ne l'est pas. Cette découverte est d'autant plus importante, qu'elle me mit bientôt en état de determiner parfaitement la propagation du son, dans l'hypothese que l'air est répandu en tout sens; ce qui m'a paru jusque là presque impossible. Il n'y a aussi aucun doute qu'ayant surmonté ce grand obstacle, on ne parvienne enfin à une méthode de résoudre directement les formules que j'avois trouvées pour la communication des ébranlemens dans l'air et peut être même des formules plus compliquées du même genre, d'où la partie la plus sublime des Mathématiques retireroit les plus grands avantages.

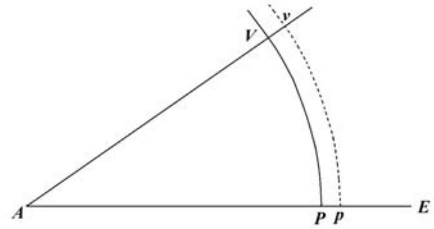

Fig. 1.

4. Soit A (Fig. 1) le centre de l'agitation primitive, qui se répande successivement par des couches concentriques en tout sens; soit $AP = AV = V$ le rayon d'une surface sphérique quelconque PV dans l'état d'équilibre, laquelle, après le tems $= t$, prenne la situation pv, dont le rayon soit $Ap = Av = V + u$, où l'intervalle $Pp = Vv = u$, que je suppose extrêmement petit, et il s'agit de déterminer cet intervalle u par le rayon naturel $AV = V$ et le tems t écoulé depuis l'agitation. Cela posé, j'ai trouvé dans le § 45 du Mémoire précédent, posant $s = \frac{u}{V}$ ou $u = Vs$, cette équation

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{4}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right)$$

ou bien, en remettant pour s sa valeur $\frac{u}{V}$, le paragraphe suivant a fourni cette équation

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = -\frac{2u}{VV} + \frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right).$$

où h est la hauteur d'une colonne d'air dont le poids est en équilibre avec l'élasticité de l'air, g marque la hauteur d'où les corps tombent dans une seconde, exprimant le tems t en secondes.

5. Si l'on ne supposoit à l'air que deux dimensions selon un plan et que les ébranlemens se répandissent par des cercles concentriques, en conservant les mêmes dénominations, on auroit à résoudre cette equation

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{3}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right)$$

qui me paroit irrésoluble, du moins par la même méthode qui réussit dans l'équation précédente. Pour faire mieux seutir cette différence, considérons ces équations sous une forme plus générale

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{n}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right)$$

et voyons comment il faudroit s'y prendre pour trouver la fonction des deux variables *V* et *t* à laquelle est égale la variable *s*. Je me servirai d'une méthode, qui semble pouvoir être employée avec succès dans toutes sortes de semblables équations où le tems entre en considération et qui consiste à éliminer tout à fait le tems.

6. Pour cet effet, je pose

$$s = P\sin\left(\alpha t + \mathfrak{A}\right),$$

où *P* soit une fonction de la seule variable *V*, et puisqu'on aura

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) = \alpha P\cos\left(\alpha t + \mathfrak{A}\right), \quad \left(\frac{dds}{dt^2}\right) = -\alpha\alpha P\sin\left(\alpha t + \mathfrak{A}\right),$$
$$\left(\frac{ds}{dV}\right) = \frac{dP}{dV}\sin\left(\alpha t + \mathfrak{A}\right), \quad \left(\frac{dds}{dV^2}\right) = \frac{ddP}{dV^2}\sin\left(\alpha t + \mathfrak{A}\right),$$

notre équation deviendra divisible par $\sin\left(\alpha t + \mathfrak{A}\right)$, et sera

$$-\frac{\alpha\alpha P}{2gh} = \frac{ndP}{VdV} + \frac{ddP}{dV^2},$$

qui ne contient que deux variables *V* et *P*, où le différentiel *dV* est pris constant. Il s'agit donc de résoudre cette équation différentio-différentielle qui, posant

$$\frac{\alpha\alpha P}{2gh} = mm,$$

prendra cette forme

$$mmPdV^2 + \frac{ndVdP}{V} + ddP = 0,$$

qui a cette propriété, que la variable *P* n'a partout qu'une seule dimension.

7. Donc, posant

$$P = e^{\int pdV} \text{ ou } \frac{dP}{P} = pdV,$$

cette équation sera réduite à une différentielle du premier degré

$$mmdV + \frac{npdV}{V} + dp + ppdV = 0,$$

laquelle, posant

$$V^n p = q \text{ ou } p = \frac{q}{V^n},$$

se transforme en celle-ci

$$\frac{dq}{V^n} + \frac{qqdV}{V^{2n}} + mmdV = 0$$

ou

$$dq + \frac{qqdV}{V^n} + mmV^n dV = 0.$$

Posons de plus $V^{n-1} = \frac{1}{r}$, pour avoir

$$r = \frac{1}{V^{n-1}} \text{ et } -\frac{(n-1)dV}{V^n} = dr,$$

et puisque

$$V = r^{\frac{-1}{n-1}}, \text{ donc } V^{2n} = r^{\frac{-2n}{n-1}},$$

nous aurons

$$-(n-1)V^n dV = r^{\frac{-2n}{n-1}} dr.$$

et partant notre équation prendra cette forme

$$dq - \frac{qqdr}{n-1} - \frac{mm}{n-1} r^{\frac{-2n}{n-1}} dr = 0,$$

qui est la même qu'autrefois avoit proposée le Comte Riccati.

8. De là il est clair, si l'on prend $n = 3$, pour le cas de deux dimensions, de l'air, qu'on aura

$$dq - \frac{1}{2} qqdr - \frac{mm}{2} r^{-3} dr = 0,$$

ce qui est un des cas irréductibles de l'équation de Riccati; et cette raison m'a fait désespérer qu'on pourroit jamais déterminer la propagation du son, à moins qu'on ne suppose à l'air qu'une seule dimension selon une lignè droite. Mais, posant $n = 4$, cette équation devenant

$$dq - \frac{1}{3} qqdr - \frac{mm}{3} r^{-\frac{8}{3}} dr = 0,$$

est un des cas réductibles de l'équation de Riccati, ce qui change tout à fait la nature de l'équation que nous avons à résoudre et nous laisse espérer que le cas de trois dimensions, que nous donnons à l'étendue de l'air, pourrait admettre la solution, quoique celui de deux dimensions n'en füt pas susceptible.

9. Pour trouver dans ce cas réductible l'équation intégrale, il est bon de se tenir à l'équation différentio-différentielle

$$mmPdV^2 + \frac{ndVdP}{V} + ddP = 0,$$

qu'il faut transformer en supposant

$$\frac{dP}{P} = QdV + \frac{dp}{p},$$

où Q est une certaine fonction de V, qu'il faut déterminer en sorte que l'intégrale ou la valeur de p puisse commodément être développée par une série. Ayant donc, à cause de dV constant, en différentiant

$$\frac{ddP}{P} - \frac{dP^2}{P^2} = dQdV + \frac{ddp}{p} - \frac{dp^2}{p^2}.$$

Or

$$\frac{dP^2}{P^2} = QQdV^2 + \frac{2QdVdp}{p} + \frac{dp^2}{pp},$$

donc

$$\frac{ddP}{P} = QQdV^2 + \frac{2QdVdp}{p} + dQdV + \frac{ddp}{p},$$

d'où nous tirons cette equation

$$mmdV^2 + \frac{nQdV^2}{V} + \frac{ndVdp}{Vp} + \frac{ddp}{p}$$
$$+QQdV^2 + dQdV + \frac{2QdVdp}{p} = 0.$$

Où il faut faire en sorte que la variable V ait ou nulle ou une seule dimension partout.

10. Posons donc

$$Q = m\sqrt{-1} + \frac{\lambda}{V},$$

de sorte que

$$dQ = -\frac{\lambda dV}{VV},$$

pour avoir

$$2\lambda m\sqrt{-1}\cdot\frac{dV^2}{V}+\frac{\lambda\lambda dV^2}{V^2}+\frac{ndVdp}{Vp}+2m\sqrt{-1}\cdot\frac{dVdp}{p}$$
$$+\frac{ddp}{p}+mn\sqrt{-1}\cdot\frac{dV^2}{V}+\frac{\lambda ndV^2}{V^2}+\frac{2\lambda dVdp}{Vp}-\frac{\lambda dV^2}{V^2}=0.$$

Soit de plus $\lambda=-n+1$, pour obtenir cette plus simple forme

$$-\frac{(n-2)mdV^2\sqrt{-1}}{V}-\frac{(n-2)dVdp}{Vp}+\frac{2mdVdp\sqrt{-1}}{p}+\frac{ddp}{p}=0.$$

ou bien, en la multipliant par *Vp*, celle-ci

$$Vddp+2mdVdp\sqrt{-1}-(n-2)dVdp-(n-2)mpdV^2\sqrt{-1}=0,$$

dont on cherche la valeur de *p* par une série.

11. Supposons

$$p=A+BV+CV^2+DV^3+EV^4+\text{etc.},$$

et la substitution donnera

$$\frac{Vddp}{dV^2}=+\ 1\cdot 2CV+2\cdot 3DV^2+3\cdot 4EV^3+4\cdot 5FV^4+\text{etc.},$$
$$+\frac{2mdVdp\sqrt{-1}}{dV}=+2mBV\sqrt{-1}+4mCV^2\sqrt{-1}+6mDV^3\sqrt{-1}+8mEV^4\sqrt{-1}+\text{etc.},$$
$$-\frac{(n-2)dp}{dV}=-(n-2)B-2(n-2)CV-3(n-2)DV^2-4(n-2)EV^3-5(n-2)FV^4-\text{etc.},$$
$$-(n-2)mp\sqrt{-1}=-(n-2)mA\sqrt{-1}-(n-2)mBV\sqrt{-1}-(n-2)mCV^2\sqrt{-1}$$
$$-(n-2)mDV^3\sqrt{-1}-(n-2)mEV^4\sqrt{-1}-\text{etc.}$$

Ces séries, prises ensemble devant être $=0$, donnent les determinations suivantes

$B+mA\sqrt{-1}=0$	$B=-\frac{mA\sqrt{-1}}{1}$
$2(n-3)C+(n-4)mB\sqrt{-1}=0$	$C=-\frac{(n-4)mB\sqrt{-1}}{2(n-3)}$

$$
\begin{array}{l|l}
3(n-4)D+(n-6)mC\sqrt{-1}=0 & D=-\dfrac{(n-6)mC\sqrt{-1}}{3(n-4)} \\
4(n-5)E+(n-8)mD\sqrt{-1}=0 & E=-\dfrac{(n-8)mD\sqrt{-1}}{4(n-5)} \\
5(n-6)F+(n-10)mE\sqrt{-1}=0 & \quad\text{etc.}
\end{array}
$$

d'où l'on voit que cette série devient finie aux cas

$$n=4,\ n=6,\ n=8,\ n=10\ \text{etc.}$$

12. Donc, pour notre cas, où $n=4$, nous aurons

$$B=-mA\sqrt{-1},\quad C=0,\quad D=0\ \text{etc.}$$

et partant

$$p=A-mA\sqrt{-1},\quad \text{donc}\quad Q=m\sqrt{-1}-\frac{3}{V}$$

et

$$\int QdV=mV\sqrt{-1}-\ 3lV.$$

Or, ayant pose

$$\frac{dP}{P}=QdV+\frac{dp}{p},$$

nous aurons en integrant

$$lP=mV\sqrt{-1}-3lV+lp$$

ou

$$P=\frac{Ae^{mV\sqrt{-1}}(1-mV\sqrt{-1})}{V^3}.$$

Or, puisqu'on peut prendre $\sqrt{-1}$ aussi bien négatif, nous aurons aussi

$$P=\frac{Be^{-mV\sqrt{-1}}(1+mV\sqrt{-1})}{V^3}.$$

et parce que dans notre equation

$$P=\frac{Ae^{mV\sqrt{-1}}(1-mV\sqrt{-1})}{V^3}+\frac{Be^{-mV\sqrt{-1}}(1+mV\sqrt{-1})}{V^3}.$$

P n'a partout qu'une seule dimension [§ 6], ces deux valeurs combinées

$$P=\frac{Ae^{mV\sqrt{-1}}(1-mV\sqrt{-1})}{V^3}.$$

en donnent l'intégrale complette.

13. Il ne s'agit maintenant que de prendre les constantes A et B en sorte que les imaginaires se détruisent. Pour cet effet il faut remarquer que

$$e^{mV\sqrt{-1}}=\cos mV+\ \sqrt{-1}\cdot\sin mV$$

et

$$e^{-mV\sqrt{-1}}=\cos mV-\ \sqrt{-1}\cdot\sin mV\,,$$

et partant nous aurons

$$PV^3=A(1-mV\sqrt{-1})\ (\cos mV+\sqrt{-1}\cdot\sin mV)+B\left(1+mV\sqrt{-1}\right)(\cos mV-\sqrt{-1}\cdot\sin mV)$$

ou

$$\begin{aligned}PV^3&=(A+B)\cos mV+(A-B)\sqrt{-1}\cdot\sin mV\\&-mV(A-B)\sqrt{-1}\cdot\cos mV+mV(A+B)\sin mV.\end{aligned}$$

Soit donc

$$A+B=C\ \text{ et }\ (A-B)\sqrt{-1}=D\,,$$

pour avoir cette expression réelle

$$PV^3=C\cos mV+D\sin mV-mDV\cos mV+mCV\sin mV\ :$$

soit de plus

$$C=E\sin\zeta\ \text{ et }\ D=E\cos\zeta\ ,$$

pour rendre cette équation plus simple,

$$PV^3=E\sin(mV+\zeta)-mEV\cos(mV+\zeta)$$

ou bien

$$P=\frac{E\sin(mV+\zeta)}{V^3}-\frac{mE\cos(mV+\zeta)}{V^2}.$$

14. Nous avons posé [§ 6]

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}=mm\,,$$

d'où il s'ensuit $\alpha = m\sqrt{2gh}$, et de là, à cause de $s = P\sin(at + \mathfrak{A})$, nous aurons

$$s = \frac{E\sin(mV+\zeta)\sin(mt\sqrt{2gh}+\mathfrak{A})}{V^3} - \frac{mE\cos(mV+\zeta)\sin(mt\sqrt{2gh}+\mathfrak{A})}{V^2},$$

où les quantités $E,\ m,\ \zeta,\ \mathfrak{A}$ sont absolument arbitraires, de sorte qu'on peut donner une infinité de formules semblables, dont non seulement chacune séparément mais aussi toutes ensemble satisfont également à notre équation [§ 4]

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{4}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right)$$

et pour la premiere equation

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = -\frac{2u}{VV} + \frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right)$$

nous aurons

$$s = \frac{E\sin(mV+\zeta)\sin(mt\sqrt{2gh}+\mathfrak{A})}{VV} - \frac{mE\cos(mV+\zeta)\sin(mt\sqrt{2gh}+\mathfrak{A})}{V},$$

ou à un assemblage d'autant de semblables formules qu'on voudra.

15. Or, tout cela n'est encore d'aucun secours pour notre dessein, qui demande des fonctions absolument arbitraires, qui puissent même être discontinues. Mais la considération de ces formes m'a fourni l'idée que notre équation pourroit être résolue par une telle expression:

$$u = \frac{A}{V^2}\Phi:(V+t\sqrt{2gh}) + \frac{B}{V}\Phi':(V+t\sqrt{2gh}),$$

où Φ marque une fonction quelconque, et la fonction Φ' en dépend en sorte que

$$d.\,\Phi:z = dz\ \Phi':z\,;$$

de la même maniere je poserai

$$d.\,\Phi':z = dz\ \Phi'':z \qquad d.\,\Phi'':z = dz\ \Phi''':z \ \text{ etc.}$$

Or de cette position nous tirons

$$\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)=+\frac{2ghA}{V^2}\Phi'':(V+t\sqrt{2gh})+\frac{2ghB}{V}\Phi''':(V+t\sqrt{2gh}),$$

$$\left(\frac{ddu}{dV^2}\right)=-\frac{2A}{V^3}\Phi\cdots+\frac{A}{V^2}\Phi'\cdots+\frac{B}{V}\Phi'',$$

$$-\frac{B}{V^2}\Phi'\cdots$$

$$\left(\frac{du}{dV}\right)=\quad\frac{6A}{V^4}\Phi\cdots-\frac{4A}{V^3}\Phi'\cdots+\frac{A}{V^2}\Phi''\cdots+\frac{B}{V}\Phi'''\cdots$$

$$+\frac{2B}{V^3}\Phi'\cdots-\frac{2B}{V^2}\Phi''\cdots$$

16. Substituons ces valeurs dans notre équation

$$0=-\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)-\frac{2u}{VV}+\frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right)+\left(\frac{ddu}{dV^2}\right)$$

et nous aurons

$$\begin{aligned}0=&\frac{6A}{V^4}\Phi\cdots+\frac{2B-4A}{V^3}\Phi'\cdots+\frac{A-2B}{V^2}\Phi''\cdots+\frac{B}{V}\Phi'''\cdots,\\ &-\frac{4A}{V^4}\Phi\cdots+\frac{2A-2B}{V^3}\Phi'\cdots\quad+\frac{2B}{V^2}\Phi''\cdots\\ &-\frac{2A}{V^4}\Phi\cdots\quad-\frac{4B}{V^3}\Phi'\cdots\quad-\frac{A}{V^2}\Phi''\cdots-\frac{B}{V}\Phi'''\cdots\end{aligned}$$

qui se réduit à

$$\frac{-2A-2B}{V^3}\Phi'\cdots=0$$

et partant $B=-A$, de sorte que notre intégrale soit

$$u=\frac{A}{V^2}\Phi:(V+t\sqrt{2gh})-\frac{A}{V}\Phi':(V+t\sqrt{2gh}),$$

qui est infiniment plus générale que celle que nous avions trouvée ci-dessus exprimée par des sinus et cosinus.

17. On pourra aussi prendre le signe du radical $\sqrt{2gh}$ négatif et on aura

$$u = \frac{A}{V^2}\Phi:(V - t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V}\Phi':(V - t\sqrt{2gh})$$

et cette formule jointe à la précédente donnera l'intégrale complette de notre formule. Mais, puisque par l'hypothese les agitations se répandent en tout sens également, cette derniere formule suffira seule, puisqu'on ne sauroit prendre *V* négatif. De là, quelque fonction qu'on prenne pour Φ, on en connoitra pour chaque tems proposé *t* la quantité *u* dont une couche sphérique quelconque, dont le rayon $AV = V$, sera répandue. On en connoitra aussi la vitesse que cette couche aura pour s'éloigner davantage du centre *A;* cette vitesse sera

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = -\frac{\sqrt{2gh}A}{VV}\Phi':(V - t\sqrt{2gh}) + \frac{A\sqrt{2gh}}{V}\Phi'':(V - t\sqrt{2gh}).$$

Or, pour l'état initial, où $t = 0$, on aura

$$u = \frac{A}{VV}\Phi:V - \frac{A}{V}\Phi':V$$

et pour la vitesse

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = -\frac{A\sqrt{2gh}}{VV}\Phi':V + \frac{A\sqrt{2gh}}{V}\Phi'':V.$$

18. Puisqu'il faut supposer qu'au commencement toute l'agitation soit renfermée dans un petit espace autour du centre *A*, la nature de la function Φ doit être telle, que ces trois expressions $\Phi:z, \Phi':z, \Phi'':z$ soient toujours évanouissantes dès que *z* surpasse une

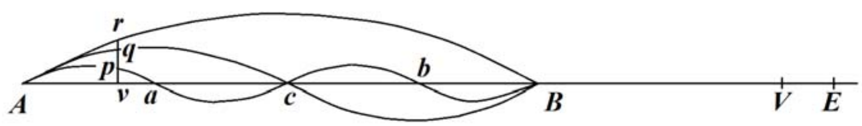

Fig. 2.

petite quantité donnée. Pour cet effet, qu'on décrive (Fig. 2) sur l'axe *AE* une courbe quelconque *Apa*, qu'on dessine encore trois fois alternativement au dessus et au dessous de l'axe, pour avoir la courbe *ApacbB* dont l'appliquée *vp*, qui répond à une abscisse quelconque $Av = z$, soit $= \Phi'':z$. Ensuite, qu'on décrive une autre courbe *AqcB* quadratrice de celle-là, de sorte que

$$vq = \frac{ar \cdot Avp}{c},$$

et l'on aura

$$vq = \frac{1}{c}\Phi':z,$$

puisque $\Phi':z = \int dz\Phi'':z$. Ensuite, qu'on décrive la troisieme courbe *ArB* quadratrice de celle-ci, dont l'appliquée soit

$$vr = \frac{ar \cdot Avq}{c}, \text{ ou } vr = \frac{1}{cc}\Phi : z$$

de sorte que par ces trois courbes on aura

$$\Phi : z = cc \cdot vr, \quad \Phi' : z = c \cdot vq, \quad \Phi'' : z = vp.$$

19. Donc, pour l'état initial, prenant l'abscisse *Av* égale au rayon de la couche sphérique dont on cherche le déplacement, ou $Av = V$, on aura le déplacement

$$u = \frac{Acc}{VV} \cdot vr - \frac{Ac}{V} \cdot vq$$

et la vitesse

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = -\frac{Ac\sqrt{2gh}}{VV} \cdot vq + \frac{A\sqrt{2gh}}{V} \cdot vp$$

d'où l'on connoit l'agitation initiale, et l'on comprend que, celle-ci étant donnée, on en tirera réciproquement la construction de la courbe arbitraire *Apa*. Cependant il importe fort peu de savoir la nature de cette agitation, puisque notre but tend principalement à déterminer la propagation. Au reste on pourroit aussi décrire de semblables courbes tirées des fonctions de $V + t\sqrt{2gh}$, qu'on peut combiner avec celles-ci. Mais on verra bientôt que la vitesse de la propagation n'en est pas altérée et qu'elle demeure la même, quelque courbe qu'on prenne pour *Apa*. Par cette raison je m'arrêterai au cas que je viens d'indiquer.

20. Je dois aussi remarquer que, quoique les membres de nos formules soient divisés par *V* et *VV*, ils ne deviennent pas pourtant infinis au cas $V = 0$, pourvu que la premiere courbe *Apa* fasse un angle aigu avec l'axe. Car, posant $Av = V$, $vp = p$, $vq = q$ et $vr = r$, soit pour le commencement $p = nV$, où *n* est un nombre fini quelconque, et on aura

$$q = \frac{nVV}{2c} \quad \text{et} \quad r = \frac{nV^3}{6cc},$$

de là, si l'abscisse *V* est extrêmement petite, on aura

$$u = \tfrac{1}{6} nAV - \tfrac{1}{2} n.AV = -\tfrac{1}{3} nAV$$

et

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = -\tfrac{1}{2} nA\sqrt{2gh} + nA\sqrt{2gh} = +\tfrac{1}{2} nA\sqrt{2gh},$$

de sorte que le déplacement du centre *A* soit même infiniment petit, et si l'on veut que sa vitesse évanouisse aussi, on n'a qu'à prendre $n = 0$ ou faire en sorte que la courbe *Apa* touche l'axe en *A*.

21. Prenant maintenant un point quelconque *V* hors de l'agitation initiale, on voit qu'au commencement, où $t = 0$, tant le déplacement *u* que la vitesse $\left(\frac{du}{dt}\right)$ sera zéro. Car, si $V > AB$, toutes ces fonctions $\Phi : V$, $\Phi' : V$, et $\Phi'' : V$ évanouissent, puisque toutes les trois courbes sont censées se réunir avec l'axe au delà de *B*. Mais, après le premier instant, dès que la quantité $V - t\sqrt{2gh}$ commence à devenir plus petite que *AB*, la couche qui passé par *V* sera ébranlée. Qu'on prenne alors $Vv = t\sqrt{2gh}$, et on aura pour le déplacement de cette couche

$$u = \frac{Acc}{VV} \cdot vr - \frac{Ac}{V} \cdot vq$$

et pour la vitesse

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = -\frac{Ac\sqrt{2gh}}{VV} \cdot vq + \frac{A\sqrt{2gh}}{V} \cdot vp\,,$$

d'où l'on voit que, plus le point *V* est éloigné du centre *A*, plus seront aussi petits tant son déplacement que sa vitesse, et cela en raison des distances à peu près, si la distance *V* est fort grande.

22. On se sera imaginé que les agitations répandues dans l'air devraient diminuer en raison des quarrés des distances, et on sera surpris de voir que les petits espaces par lesquels les couches s'avancent diminuent seulement en raison des distances, lorsque les distances sont fort grandes. Mais il faut observer que l'agitation de chaque couche ne dépend pas uniquement de son déplacement *u*, mais aussi de sa vitesse pendant qu'elle est ébranlée; et celle-ci étant aussi réciproquement proportionnelle à la distance au centre, d'où l'agitation entiere doit être censée bien plus petite. Au reste, si la force du son, en tant qu'il est apperçu, dépend ou du seul déplacement des particules d'air ou seulement de leur vitesse, on pourra dire que la force d'un son diminue en raison des distances; mais, si elle dépend de tous les deux conjointmnent, elle suivra la raison réciproque quarrée des distances.

23. Posons la distance $AB = a$, qui est le rayon de la sphere qui aura été primitivement agitée, et cette agitation sera transmise jusqu'en *V*, la distance *AV* étant $= V$, après le tems *t*, en sorte que $V - t\sqrt{2gh} = AB = a$, d'où l'on tire

$$t = \frac{V - a}{\sqrt{2gh}}\,;$$

ou bien, dans une seconde l'agitation sera transmise par un espace $V = a + \sqrt{2gh}$, qui est de la quantité *a* plus grand que celui que nous avions trouvé dans l'hypothese d'une seule dimension, quoique cette même augmentation y ait également lieu. Mais cela ne suffit en aucune maniere pour obtenir la vitesse qu'on connoit par les expériences, et partant il n'y a plus de doute que la force de l'agitation produise cette accélération, pendant que les sons extrêmement foibles seroient d'accord avec notre formule, qui, comme j'ai d'abord remarqué, n'a lieu que lorsque les agitations sont quasi infiniment petites.

24. Or, l'intégrale complette de notre équation étant

$$u = \frac{A}{V^2}\Phi:(V+t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V}\Phi':(V+t\sqrt{2gh}) + \frac{B}{V^2}\Psi:(V-t\sqrt{2gh}) - \frac{B}{V}\Psi':(V-t\sqrt{2gh}),$$

on en peut faire varier à l'infini l'agitation primitive, non seulement par rapport au déplacement de chaque couche sphérique, mais aussi par rapport à la vitesse qui leur sera imprimée, puisqu'on a en général pour la vitesse

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{A\sqrt{2gh}}{VV}\Phi':(V+t\sqrt{2gh}) - \frac{A\sqrt{2gh}}{V}\Phi'':(V+t\sqrt{2gh}) - \frac{B\sqrt{2gh}}{VV}\Psi':(V-t\sqrt{2gh}) + \frac{B\sqrt{2gh}}{V}\Psi'':(V-t\sqrt{2gh}),$$

d'où l'on a pour l'état initial, en posant $t = 0$,

$$u = \frac{A}{V^2}\Phi:V - \frac{A}{V}\Phi':V + \frac{B}{V^2}\Psi:V - \frac{B}{V}\Psi':V$$

et

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{A\sqrt{2gh}}{VV}\Phi':V - \frac{A\sqrt{2gh}}{V}\Phi'':V - \frac{B\sqrt{2gh}}{VV}\Psi':V + \frac{B\sqrt{2gh}}{V}\Psi'':V,$$

où les caracteres Φ et Ψ marquent des fonctions quelconques, tant continues que discontinues, ce qui nous met en état de donner une solution générale de notre probleme, en supposant l'agitation primitive quelconque.

25. On peut bien supposer $B = A$, puisque la variété des fonctions Φ et Ψ renferme déjà cette différence, et pour qu'on puisse faire l'application à une agitation primitive quelconque, posons

$$\Phi:V + \Psi:V = \Sigma:V \quad \text{et} \quad \Phi:V - \Psi:V = \Theta:V,$$

de sorte que

$$\Phi : V = \tfrac{1}{2}\Sigma : V + \tfrac{1}{2}\Theta : V \quad \text{et} \quad \Psi : V = \tfrac{1}{2}\Sigma : V - \tfrac{1}{2}\Theta : V \,,$$

et nous aurons pour l'état initial

$$u = \frac{A}{V^2}\Sigma : V - \frac{A}{V}\Sigma' : V$$

et

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{A\sqrt{2gh}}{VV}\Theta' : V - \frac{A\sqrt{2gh}}{V}\Theta'' : V.$$

Maintenant, posons pour ce même état

$$u = AP \quad \text{et} \quad \left(\frac{du}{dt}\right) = AQ\sqrt{2gh},$$

de sorte que P et Q soient des fonctions données de V conformément à l'agitation primitive, et il s'agit de trouver les fonctions Σ et Θ de ces égalités:

$$\Sigma : V - V\Sigma' : V = V^2 P \quad \text{et} \quad \Theta' : V - V\Theta'' : V = V^2 Q.$$

26. Posons pour cet effet

$$\Sigma : V = p \quad \text{et} \quad \Theta' : V = q,$$

pour avoir

$$p - \frac{Vdp}{dV} = V^2 P \quad \text{et} \quad q - \frac{Vdq}{dV} = V^2 Q$$

ou bien

$$\frac{pdV - Vdp}{VV} = PdV \quad \text{et} \quad \frac{qdV - Vdq}{VV} = QdV,$$

d'où l'on tire

$$-\frac{p}{V} = \int PdV \quad \text{et} \quad -\frac{q}{V} = \int QdV.$$

Donc, connoissant les fonctions P et Q par l'agitation primitive, nous en formerons nos fonctions en sorte

$$\Sigma : V = -V\int PdV \quad \text{et} \quad \Theta' : V = -V\int QdV.$$

donc

$$\Theta : V = -\int VdV \int QdV$$

et ensuite

$$\Sigma' : V = -\int PdV - VP \quad \text{et} \quad \Theta'' : V = -\int QdV - VQ,$$

d'où l'on tracera aisément des courbes dont les appliquées représentent toutes les fonctions dont nous avons besoin dans cette recherche.

27. Après avoir déterminé la nature de ces fonctions par l'agitation imprimée au commencement, on en déterminera pour un tems quelconque t l'élargissement u de toutes les couches sphériques dont le rayon est suppose $= V$. On aura pour u l'expression suivante:

$$u = \begin{cases} +\frac{A}{2VV}\Sigma:(V+t\sqrt{2gh}) + \frac{A}{2VV}\Theta:(V+t\sqrt{2gh}) \\ +\frac{A}{2VV}\Sigma:(V-t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{2VV}\Theta:(V-t\sqrt{2gh}) \\ -\frac{A}{2V}\Sigma':(V+t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{2V}\Theta':(V+t\sqrt{2gh}) \\ -\frac{A}{2V}\Sigma':(V-t\sqrt{2gh}) + \frac{A}{2V}\Theta':(V-t\sqrt{2gh}) \end{cases}$$

d'où l'on voit comme auparavant que, pendant une seconde, le son ne sauroit être transmis que par un espace $= \sqrt{2gh}$, mais pourtant avec cette restriction que le son soit extrêmement foible; pour les sons plus forts on n'en sauroit rien conclure.

28. Cette propagation par des couches concentriques nous fournit une infinité de solutions particulieres des formules générales que j'avois trouvées pour des agitations quelconques dans l'air (voyez le § 43 du Mémoire précédent):

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddy}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddz}{dXdZ}\right),$$
$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddy}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dYdZ}\right),$$
$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dXdZ}\right) + \left(\frac{ddy}{dYdZ}\right) + \left(\frac{ddz}{dZ^2}\right),$$

Car, pour avoir une solution particuliere quelconque, supposons le centre précédent des agitations dans un point déterminé par les coordonnées a, b, c,
et nous aurons

$$V = \sqrt{((X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2)}$$

et ensuite

$$x = \frac{X-a}{V}\cdot u, \quad y = \frac{Y-b}{V}\cdot u, \quad z = \frac{Z-c}{V}\cdot u.$$

29. Prenant donc pour a, b, c trois constantes quelconques, soit pour

abréger

$$\sqrt{((X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2)}=V,$$

et que les caracteres Φ et Ψ marquent des fonctions quelconques régulieres ou irrégulieres, d'où par la différentiation on aura les fonctions dérivées Φ' et Ψ', et qu'on prenne

$$u=\frac{A}{V^2}\Phi:(V+t\sqrt{2gh})-\frac{A}{V}\Phi':(V+t\sqrt{2gh})$$
$$+\frac{B}{V^2}\Psi:(V-t\sqrt{2gh})-\frac{B}{V}\Psi':(V-t\sqrt{2gh}).$$

Alors on aura pour la résolution de nos trois formules les valeurs suivantes des trois variables *x, y, z* cherchées:

$$x=\frac{X-a}{V}\cdot u,\quad y=\frac{Y-b}{V}\cdot u,\quad z=\frac{Z-c}{V}\cdot u$$

et en changeant les constantes *a*, *b*, *c* à volonté on obtiendra une infinite de semblables valeurs pour *x, y, z,* qui, étant jointes ensemble, donneront une solution assez générale de notre probleme.

30. Cette solution sert à nous faire comprendre que, s'il y a plusieurs centres d'agitation, la propagation de chacune se fait de la même maniere que si elle se trouvoit toute seule dans l'air. Donc, si plusieurs sons sont excités en différens endroits de l'air, chacun se répand par des couches sphériques et concentriques de la même maniere que s'il existoit tout seul dans l'air, et tous les autres n'en troubleront pas la propagation, et s'il arrive que les mêmes particules de l'air sont ébranlées à la fois par plusieurs sons, leur mouvement sera composé de tous les mouvemens que chaque son y produirait séparément; ce qui est la cause que la propagation de chacun n'est pas troublée par les autres. L'explication de ce phénomene, que nous devons uniquement à la théorie, est sans doute bien importante.

31. Avant que de finir cette matiere, je proposerai encore une autre méthode de traiter les trois équations principales rapportées dans le § 28, laquelle consiste dans l'élimination du tems *t.* Pour cet effet, qu'on pose

$$x=p\sin(\alpha t+\beta),\quad y=q\sin(\alpha t+\beta),\; z=r\sin(\alpha t+\beta),$$

où *p, q, r* soient des fonctions des trois variables *X, Y* et *Z,* sans renfermer le tems *t.* Alors, après avoir fait la substitution, on aura les trois equations suivantes, d'où il faut déterminer les trois inconnues *p, q, r*:

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}p+\left(\frac{ddp}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddq}{dXdY}\right)+\left(\frac{ddr}{dXdZ}\right)=0,$$
$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}q+\left(\frac{ddp}{dXdY}\right)+\left(\frac{ddq}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddr}{dYdZ}\right)=0,$$
$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}r+\left(\frac{ddp}{dXdZ}\right)+\left(\frac{ddq}{dYdZ}\right)+\left(\frac{ddr}{dZ^2}\right)=0,$$

32. Si nous posons

$$\left(\frac{dp}{dX}\right)+\left(\frac{dq}{dY}\right)+\left(\frac{dr}{dZ}\right)=v,$$

nous aurons

$$p=-\frac{2gh}{\alpha\alpha}\left(\frac{dv}{dX}\right),\quad q=-\frac{2gh}{\alpha\alpha}\left(\frac{dv}{dY}\right),\quad r=-\frac{2gh}{\alpha\alpha}\left(\frac{dv}{dZ}\right),$$

d'où il est évident que

$$\left(\frac{dp}{dY}\right)=\left(\frac{dq}{dX}\right),\quad \left(\frac{dp}{dZ}\right)=\left(\frac{dr}{dX}\right),\quad \left(\frac{dq}{dZ}\right)=\left(\frac{dr}{dY}\right).$$

ou que la formule

$$pdX+qdY+rdZ$$

est intégrable, l'intégrale étant

$$=-\frac{2gh}{\alpha\alpha}v=-\frac{2gh}{\alpha\alpha}\left(\left(\frac{dp}{dX}\right)+\left(\frac{dq}{dY}\right)+\left(\frac{dr}{dZ}\right)\right).$$

Or, de là nous concluons de plus

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}p+\left(\frac{ddp}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddq}{dXdY}\right)+\left(\frac{ddr}{dXdZ}\right)=0,$$
$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}q+\left(\frac{ddq}{dXdY}\right)+\left(\frac{ddq}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddq}{dYdZ}\right)=0,$$
$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}r+\left(\frac{ddr}{dXdZ}\right)+\left(\frac{ddr}{dYdZ}\right)+\left(\frac{ddr}{dZ^2}\right)=0,$$

de sorte que toutes, les trois quantités *p, q, r* sont déterminées par la même équation, dont il s'agit de trouver la résolution générale.

AUTRE MANIERE DE PARVENIR A LA SOLUTION

33. L'explication de la propagation du son que je viens de trouver peut être déduite immédiatement de nos formules principales, qui, posant

$$\left(\frac{dx}{dX}\right)+\left(\frac{dy}{dY}\right)+\left(\frac{dz}{dZ}\right)=v,$$

sont

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{dv}{dX}\right),\quad \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{dv}{dY}\right),\quad \left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{dv}{dZ}\right),$$

d'où l'on tire cette équation pour trouver v

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddv}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddv}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddv}{dZ^2}\right),$$

comme je l'ai fait voir dans mon Mémoire précédent [§ 43]. Or, si l'on pose

$$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=VV,$$

où l'on peut prendre pour *a, b, c* des quantités constantes quelconques, cette équation est remplie par cette formule

$$v=\frac{A}{V}\Phi:(V\pm t\sqrt{2gh}),$$

comme on peut le voir en faisant la substitution.

34. Car, puisque *V* ne dépend point du tems *t*, on aura

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right)=\frac{2Agh}{V}\Phi'':(V\pm t\sqrt{2gh});$$

ensuite, à cause de

$$\left(\frac{dV}{dX}\right)=\frac{X-a}{V},\quad \left(\frac{dV}{dY}\right)=\frac{Y-b}{V},\quad \left(\frac{dV}{dZ}\right)=\frac{Z-c}{V},$$

on a

$$\left(\frac{dV}{dX}\right)=-\frac{A\left(X-a\right)}{V^3}\Phi:(V\pm t\sqrt{2gh})+\frac{A\left(X-a\right)}{V^2}\Phi':(V\pm t\sqrt{2gh}),$$

et différentiant encore

$$\left(\frac{ddv}{dX^2}\right) = -\frac{A}{V^3}\Phi:(V \pm t\sqrt{2gh}) - \frac{3A(X-a)^2}{V^4}\Phi':(V \pm t\sqrt{2gh})$$
$$+\frac{A(X-a)^2}{V^3}\Phi'':(V \pm t\sqrt{2gh}) + \frac{3A(X-a)^2}{V^5}\Phi:(V \pm t\sqrt{2gh}) + \frac{A}{V^2}\Phi':(V \pm t\sqrt{2gh}),$$

d'où l'on formera aisément les valeurs des formules $\left(\frac{ddv}{dY^2}\right)$ et $\left(\frac{ddv}{dZ^2}\right)$, et partant la somme de ces trois formules, à cause de

$$(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2 = V^2,$$

se réduit à

$$\frac{A}{V}\Phi'':(V \pm t\sqrt{2gh});$$

et cette même valeur est aussi celle de $\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right)$, d'où l'on voit que la formule

$$v = \frac{A}{V}\Phi:(V \pm t\sqrt{2gh})$$

satisfait parfaitement à l'équation rapportée ci-dessus.

35. Pour trouver de là les quantités *x, y, z,* donnons à la valeur trouvée pour *v* cette forme

$$v = \frac{A}{V}\Phi'':(V + t\sqrt{2gh}),$$

d'où nous aurons

$$\left(\frac{dv}{dX}\right) = -\frac{A(X-a)}{V^3}\Phi'':(V + t\sqrt{2gh}) + \frac{A(X-a)}{V^2}\Phi''':(V + t\sqrt{2gh}),$$

ce qui est aussi la valeur de $\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$. Prenons donc les intégrales en supposant le seul tems *t* variable et, puisque

$$\int dt\,\Phi''':(V + t\sqrt{2gh}) = \frac{1}{\sqrt{2gh}}\Phi'':(V + t\sqrt{2gh}),$$

nous obtiendrons

$$\frac{1}{\sqrt{2gh}}\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{A(X-a)}{V^3}\Phi':(V + t\sqrt{2gh}) + \frac{A(X-a)}{V^2}\Phi'':(V + t\sqrt{2gh}) + \frac{P}{\sqrt{2gh}},$$

où P est une fonction quelconque de X, Y et Z, qu'on regarde ici comme constante, et en intégrant encore,

$$x=-\frac{A(X-a)}{V^3}\Phi:(V+t\sqrt{2gh})+\frac{A(X-a)}{V^2}\Phi':(V+t\sqrt{2gh})+Pt+\mathfrak{P},$$

où $\mathfrak{P}$ est aussi une fonction quelconque de X, Y et Z.

36. De la même maniere on trouvera

$$y=-\frac{A(Y-b)}{V^3}\Phi:(V+t\sqrt{2gh})+\frac{A(Y-b)}{V^2}\Phi':(V+t\sqrt{2gh})+Qt+\mathfrak{Q},$$
$$z=-\frac{A(Z-c)}{V^3}\Phi:(V+t\sqrt{2gh})+\frac{A(Z-c)}{V^2}\Phi':(V+t\sqrt{2gh})+Rt+\mathfrak{R},$$

où Q, R et $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ sont aussi des fonctions des trois variables X, Y, Z, qui dépendent en sorte des precedents P et $\mathfrak{P}$ que

$$\left(\frac{ddP}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddQ}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddR}{dZ^2}\right)=0$$

et

$$\left(\frac{dd\mathfrak{P}}{dX^2}\right)+\left(\frac{dd\mathfrak{Q}}{dY^2}\right)+\left(\frac{dd\mathfrak{R}}{dZ^2}\right)=0.$$

Mais pour notre dessein on peut négliger toutes ces fonctions P, Q, R et $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, ou les supposer égales à 0.

37. Donc, si l'on suppose dans l'air autant de points fixes c, c', c'' etc. (Fig. 3) qu'on voudra, déterminés par les coordonnées

$$Aa=a,\ ab=b,\ bc=c;\ Aa'=a',\ a'b'=b',\ b'c'=c' \text{ etc.},$$

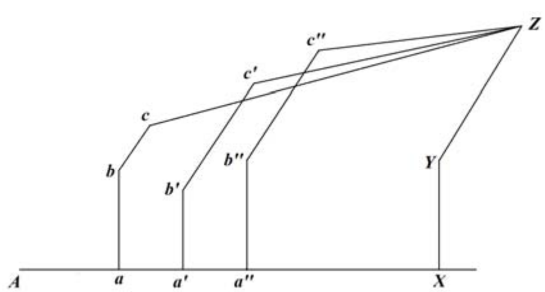

Fig. 3.

et après y avoir tiré d'un point quelconque *Z*, déterminé par les coordonnées $AX = X$, $XY = Y$ et $YZ = Z$, les droites *Zc*, *Zc'*, *Zc"*, qu'on nomme ces distances

$$Zc = V,\ Zc' = V',\ Zc'' = V''$$

et qu'on pose pour abréger

$$-\frac{1}{V}\Sigma : (V - t\sqrt{2gh}) + \Sigma' : (V - t\sqrt{2gh}) = P,$$
$$-\frac{1}{V'}\Psi : (V' + t\sqrt{2gh}) + \Psi' : (V + t\sqrt{2gh})$$
$$-\frac{1}{V'}\Theta : (V' - t\sqrt{2gh}) + \Theta' : (V - t\sqrt{2gh}) = Q,$$
$$-\frac{1}{V''}\Omega : (V'' - t\sqrt{2gh}) + \Omega' : (V'' + t\sqrt{2gh})$$
$$-\frac{1}{V'''}\Xi : (V''' - t\sqrt{2gh}) + \Xi' : (V''' - t\sqrt{2gh}) = R,$$

les dérangemens du point *Z* seront exprimés par les équations suivantes:

$$x = \frac{(X-a)P}{VV} + \frac{(X-a')}{V'V'} + \frac{(X-a'')R}{V''V''},$$
$$y = \frac{(Y-b)P}{VV} + \frac{(Y-b')}{V'V'} + \frac{(Y-b'')R}{V''V''},$$
$$z = \frac{(Z-c)P}{VV} + \frac{(Z-c')}{V'V'} + \frac{(Z-c'')R}{V''V''}.$$

38. Ces mêtnes formules expriment l'état initial, quand on pose $t = 0$, et celui-ci étant donné ; on en connoitra la nature des fonctions $\Phi,\ \Sigma,\ \Psi,\ \Omega,\ \Xi.$ Supposons ces fonctions telles que, posant $t = 0$, les quantités *P, Q, R* soient toujours égales à zéro, excepté les seuls cas où les distances *V, V', V"* sont à peu près égales à ces quantités *D, D', D"*, et alors le point *Z* sera en repos, à moins qu'il n'y ait

$$\text{ou }\ V - t\sqrt{2gh} = D,\ \text{ ou }\ V' - t\sqrt{2gh} = D',\ \text{ ou }\ V'' - t\sqrt{2gh} = D'',$$

d'où l'on voit que les agitations primitives excitées autour des points *c, c', c"* sont séparément transmises au point *Z* et chacune de la même maniere que si les autres n'existoient point. Et partant il est clair que toutes ces agitations ne se troublent pas entr'elles.