SUPPLEMENT TO THE INVESTIGATIONS ON THE PROPAGATION OF SOUND [E306]

1. In the previous memoir I have assumed that sound has been transmitted through the air in one dimension only along a straight line, in which I have followed the other geometers who have treated this same matter. Since one has mainly in mind a derivation of the speed of propagation, it appears to be the same, should the air be an expanse in all three dimensions or as a single dimension, although certainly the disturbances excited in the air decrease more considerably, when the air is spread out in all directions. But the main reason for this restriction is without doubt, that one meets insurmountable difficulties when one wishes to assume that the air spreads out in three dimensions, or in two only, considering a layer of air only enclosed between two parallel planes, and extremely close together.

2. However, it is still doubtful if the speed of sound that one finds under the hypothesis of a single dimension, is not affected by the extension according to other dimensions, and since the actual speed of sound concluded from experiments is considerably larger than that given by the theory based on the assumption of one dimension, there is reason to suspect that extension to all dimensions could cause this increase in speed. At least it shall always be most important to make efforts to develop other assumptions, where we assume the air to have two or all three dimensions ; for the one and the other hypothesis I will try to relate back the air disturbances to analytical formulas, the resolution of which will be a very worthy subject to occupy the skill of the geometers.

3. I begin with the hypothesis of two dimensions, or the air shall be extended out in a plane, which shall be to it as a board ; one can give it a small thickness, which is everywhere the same $=e$, and at first I consider the state of equilibrium, where all the air has the same density and the same spring [*i.e.* pressure]. As unity expresses this natural density of the air, and as its elasticity shall be in equilibrium with the weight of a column of air whose height is $=h$, assuming the air as the natural state, and the density of which is $=1$; it is clear that the height h is determined by that of the barometer, by multiplying it by the ratio of the density or specific gravity of quicksilver surpassing that of the air. And the height of the barometer is $=k$, if we assume the specific gravity of quicksilver 14 times greater than that of water, and this 800 times greater than the natural air, we will have

$$h = 14 \cdot 800k = 11200k.$$

4. In the equilibrium state we consider some point *Y* (Fig.1) from which one drops the perpendicular *YX* to a fixed line *AE*, to have the two coordinates $AX = X$ and $XY = Y$, which determine the position of the point *Y*. Now, after some disturbance excites our air, and at a given instant, the point *Y* is found at *y*, of which the position shall be determined by the coordinates $Ax = x$ and $xy = y$, and it is clear that *x* and *y* shall be functions of *X* and *Y*, as well as the time between them, but as long as we consider the state of the air at the same instant, the time does not yet enter into the consideration, or it can be thought of as a constant. From which, since *x* as well as *y* is a function of the two variables *X* and *Y*, we consider that

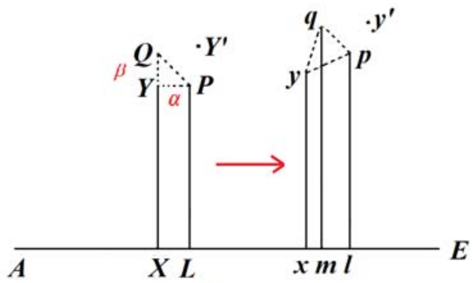

Fig. 1.

$$dx = LdX + MdY \text{ and } dy = PdX + QdY .$$

5. To find both the density as well as the elasticity at *y* in the disturbed state, we consider an infinitely small volume of air, which in its undisturbed state shall be *YPQ*, and after the agitation it shall be in the disturbed state *ypq* ; of which the relation of both the density as well as the elasticity of the volume *ypq* to the former state shall be known. Just as the point *Y* determined by the coordinates *X* and *Y* has been transported to *y* determined by the coordinates *x* and *y*, so any other point infinitely near to *Y*, and determined by the coordinates $X + dX$ and $Y + dY$, will be transported to a [disturbed] point determined by the coordinates

$$x + LdX + MdY \text{ and } y + PdX + QdY .$$

The triangle *YPQ* can be taken of the kind shown in the figure, and putting $YP = XL = \alpha$ and $YQ = \beta$, and

the point	whose coordinates are			will be found	at the point	whose coordinates are		
Y	X	and	Y		y	x	and	y
P	$X + \alpha$	and	Y		p	$x + L\alpha$	and	$y + P\alpha$
Q	X	and	$Y + \beta$		q	$x + M\beta$	and	$y + Q\beta$

6. Hence, having drawn the ordinates *pl* and *qm* from *p* and *q*, we will have

$$Ax = x,\ Al = x + L\alpha,\ Am = x + M\beta,$$
$$xy = y,\quad lp = y + P\alpha,\ mq = y + Q\beta,$$

from which it is required to find the area of the triangle *ypq*, which is itself determined from these from the trapeziums *xypl*, *xyqm*, *lpqm* of the kind :

$$\Delta ypq = \tfrac{1}{2}xm(xy+mq) + \tfrac{1}{2}ml(mq+lp) - \tfrac{1}{2}xl(xy+lp)\,;$$

now

$$xm = M\beta,\ ml = L\alpha - M\beta \text{ and } xl = L\alpha\,,$$

since

$$\Delta ypq = \tfrac{1}{2}\beta M(2y+\beta Q) + \tfrac{1}{2}(\alpha L - \beta M)(2y+\alpha P+\beta Q) - \tfrac{1}{2}\alpha L(2y+\alpha P)$$

or

$$\Delta ypq = \tfrac{1}{2}\beta M(-\ \alpha P) + \tfrac{1}{2}\alpha L(\beta Q) = \tfrac{1}{2}\alpha\beta(LQ - MP).$$

Hence, since in the original state the area of the triangle *YPQ* becomes $\tfrac{1}{2}\alpha\beta$, the density of the same air now filling the triangle *ypq* will be

$$= \frac{1}{LQ-MP}$$

and the elasticity

$$= \frac{h}{LQ-MP}\,;$$

from which we draw this conclusion : the density at y

$$= \frac{1}{LQ-MP},$$

the elasticity at y

$$= \frac{h}{LQ-MP}.$$

7. Since the place of the point *y* depend on that of *Y*, the spring or elasticity at *y* (on putting that $=\Pi$, will be of the kind such that $\Pi = \dfrac{h}{LQ-MP}$) also will be a function of *X* and *Y*, still always considering the time as constant ; and thus we will have $d\Pi = EdX + FdY$, where *E* and *F* are determined by the letters *L*, *M*, *P*, *Q* as follows :

$$E=\frac{-h\left(Q\left(\frac{dL}{dX}\right)+L\left(\frac{dQ}{dX}\right)-P\left(\frac{dM}{dX}\right)-M\left(\frac{dP}{dX}\right)\right)}{\left(LQ-MP\right)^2},$$

$$F=\frac{-h\left(Q\left(\frac{dL}{dY}\right)+L\left(\frac{dQ}{dY}\right)-P\left(\frac{dM}{dY}\right)-M\left(\frac{dP}{dY}\right)\right)}{\left(LQ-MP\right)^2}.$$

That is, a point Y' in a state of equilibrium infinitely close to Y, determined by the coordinates $\mathrm{X}+dX$ and $Y+dY$, being transported by the agitation to y', there the elasticity will be expressed by the height

$$\Pi+EdX+FdY,$$

while the elasticity at y corresponds to the height

$$\Pi=\frac{h}{LQ-MP}.$$

8. Now, the position of the point y' be determined by the coordinates

$$x+LdX+MdY \text{ and } y+PdX+QdY,$$

we can assign the variation of the spring [*i.e*. pressure] from the point y in an unsettled state as far as to another point y' infinitely close. Let the coordinates for the point y' be $x+\alpha$ and $y+\beta$, taking α and β to indicate the infinitely small elements, and we have only to find the place Y' of the same point in its natural state. To do this, putting

$$LdX+MdY=\alpha \text{ and } PdX+QdY=\beta,$$

from which we derive

$$dX=\frac{\alpha Q-\beta M}{LQ-MP} \text{ and } dY=\frac{\beta L-\alpha P}{LQ-MP}$$

So, for the point y' in the unsettled state, determined by the coordinates $x+\alpha$ and $y+\beta$ We will have the strength expressed by the height

$$\Pi+\frac{\alpha(EQ-FP)+\beta(FL-EM)}{LQ-MP}.$$

9. To develop this value better and that of the letters E and F, it should be noted that having put

$$dx = LdX + MdY \text{ and } dy = PdX + QdY$$

we will have

$$\left(\frac{dL}{dY}\right) = \left(\frac{dM}{dX}\right) \text{ and } \left(\frac{dP}{dY}\right) = \left(\frac{dQ}{dX}\right)$$

and hence

$$E = \frac{h\left(P\left(\frac{dL}{dY}\right) - Q\left(\frac{dL}{dX}\right) - L\left(\frac{dP}{dY}\right) + M\left(\frac{dP}{dX}\right)\right)}{(LQ - MP)^2},$$

$$F = \frac{h\left(P\left(\frac{dM}{dY}\right) - Q\left(\frac{dL}{dY}\right) - L\left(\frac{dQ}{dY}\right) + M\left(\frac{dP}{dY}\right)\right)}{(LQ - MP)^2},$$

from which we derive

$$EQ - FP = \frac{h\left(2PQ\left(\frac{dL}{dY}\right) - QQ\left(\frac{dL}{dX}\right) - (LQ + MP)\left(\frac{dP}{dY}\right) + MQ\left(\frac{dP}{dX}\right) + LP\left(\frac{dQ}{dY}\right)\right)}{(LQ - MP)^2},$$

$$FL - EM = \frac{h\left(2LM\left(\frac{dP}{dY}\right) - MM\left(\frac{dP}{dX}\right) - LL\left(\frac{dQ}{dY}\right) - (LQ + MP)\left(\frac{dL}{dY}\right) + MQ\left(\frac{dL}{dX}\right) + LP\left(\frac{dM}{dY}\right)\right)}{(LQ - MP)^2}.$$

Then it should also be noted that there will be

$$L = \left(\frac{dx}{dX}\right),\ M = \left(\frac{dx}{dY}\right),\ P = \left(\frac{dy}{dX}\right), \text{ and } Q = \left(\frac{dy}{dY}\right).$$

10. Hence, if we consider an element of air in the unsettled state *yprq* (Fig. 2) the figure of which is a rectangle, the sides $yp = \delta$ and $yq = \varepsilon$ being parallel and taken parallel to our coordinates, we can determine the elasticity for the four points *y*, *p*, *q*, *r*. Because, with the point *y* the elasticity for the point *p*, whose coordinates are $x + \delta$ and *y* (therefore), elasticity will be $= \Pi$. Then for the point q, whose coordinates are x and (since $a = \delta$ and $\beta = 0$), the elasticity will $= \Pi + \frac{\delta(EQ - FP\ )}{LQ - MP}$. Then for the point *q*, if which the coordinates are *x* and $y + \varepsilon$ (thus $\alpha = 0$ and $\beta = \varepsilon$), the elasticity will be $= \Pi + \frac{\varepsilon(FL - EM\ )}{LQ - MP}$.

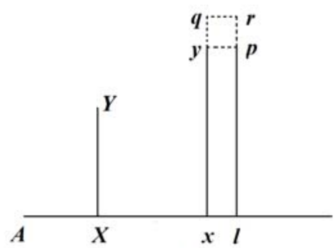

Fig. 2.

And for the point *r*, of which the coordinates are $x + \delta$ and $y + \varepsilon$ (as $\alpha = \delta$ and $\beta = \varepsilon$), the elasticity will be

$$= \Pi + \frac{\delta(EQ - FP) + \varepsilon(FL - EM)}{LQ - MP},$$

from which we are able to determine the pressure of the air on the four sides of the rectangle *ypqr*.

11. The side $yp = \delta$ having a thickness and hence the area $= \delta e$, since the pressures at *y* and *p* are unequal, if we take an average, the pressure on the side *yp* will be equal to the weight of a volume of air: the pressure on *yp*

$$= \delta e\left(2\Pi + \frac{\delta(EQ - FP)}{2(LQ - MP)}\right).$$

The same on the opposite side *qr* we will have the pressure on *qr* :

$$= \delta e\left(2\Pi + \frac{\delta(EQ - FP) + 2\varepsilon(FL - EM)}{2(LQ - MP)}\right).$$

Then on the side $yq = \varepsilon e$, we have the pressure on *yq* :

$$= \varepsilon e\left(2\Pi + \frac{\varepsilon(FL - EM)}{2(LQ - MP)}\right)$$

and in the same manner the pressure on *pr* :

$$=\varepsilon e\left(2\Pi+\frac{2\delta(EQ-FP)+\varepsilon(FL-EM)}{2(LQ-MP)}\right).$$

Since the difference between the forces at *y* and *q* is equal to these forces at *p* and *r*, we see indeed that the inequality of forces does not disturb the effect.

12. Since these forces act perpendicularly on the sides, the element *ypqr* driven by the first two forces following the direction *yx* will be driven by one force which is

$$=\frac{\delta\varepsilon e\left(FL-EM\right)}{LQ-MP};$$

and the last two together produce one force

$$=\frac{\delta\varepsilon e\left(EQ-FP\right)}{LQ-MP}$$

according to *xA*. Or, the element *ypqr* will be pushed by the two following forces:
a force along the direction *Ax* :

$$=\frac{\delta\varepsilon e\left(FP-EQ\right)}{LQ-MP},$$

and a force along the *xy* direction :

$$=\frac{\delta\varepsilon e\left(EM-FL\right)}{LQ-MP}.$$

However, the volume contained in this rectangle *ypqr* being $=\delta\varepsilon e$, if we multiply by the density $\frac{1}{LQ-MP}$, the mass will be $=\frac{\delta\varepsilon e}{LQ-MP}$.

13. Having found these forces acting, we introduce the time *t*, and in the element of time *dt* we can assign the following accelerations along the same directions. If we express the time *t* in seconds and *g* indicates the height from which a heavy body falls in a second [from rest], the principles of mechanics provide us with the following equations

$$\frac{\delta\varepsilon e}{LQ-MP}\cdot\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=2g\cdot\frac{\delta\varepsilon e\left(FP-EQ\right)}{LQ-MP}$$

and

$$\frac{\delta\varepsilon e}{LQ-MP}\cdot\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=2g\cdot\frac{\delta\varepsilon e\left(EM-FL\right)}{LQ-MP}$$

or else these

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=2g\cdot\delta\varepsilon e\left(FP-EQ\right)\text{ and }\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=2g\cdot\left(EM-FL\right),$$

and now it is necessary to consider x and y not only as functions of the two original variables X and Y, but also of the time t.

14. This is the general solution of our problem, but to make it applicable to the case that we have in mind, it is necessary to consider all the changes caused by the agitation as extremely small, just as one assumed in the hypothesis of a single dimension. The differences between x and X as well as between y and Y thus will be extremely small, to take account of this circumstance, putting $x=X+p$ and $y=Y+q$; and the quantities p and q must be regarded as vanishing. From that we will have

$$dX+dp=LdX+MdY\text{ and }dY+dq=PdX+QdY$$

or

$$dp=\left(L-1\right)dX+MdY\text{ et }dq=PdX+\left(Q-1\right)dY,$$

and therefore the quantities M and P will be extremely small, and both L and Q only a little different from unity.

15. Hence, for infinitely small agitations, we will have approximately

$$L=1,\ M=0,\ P=0\text{ and }Q=1,$$

and then

$$L=1+\left(\frac{dp}{dX}\right),\ M=\left(\frac{dp}{dY}\right),\ P=\left(\frac{dq}{dX}\right),\ Q=1+\left(\frac{dq}{dY}\right),$$

from which we deduce

$$\frac{dL}{dX}=\left(\frac{ddp}{dX^2}\right),\ \frac{dL}{dY}=\left(\frac{ddp}{dXdY}\right)=\left(\frac{dM}{dX}\right),\ \left(\frac{dM}{dY}\right)=\left(\frac{ddp}{dY^2}\right),$$
$$\left(\frac{dP}{dX}\right)=\left(\frac{ddq}{dX^2}\right),\ \left(\frac{dP}{dY}\right)=\left(\frac{ddq}{dXdY}\right)=\left(\frac{dQ}{dX}\right),\ \left(\frac{dQ}{dY}\right)=\left(\frac{ddq}{dY^2}\right).$$

From that, having $LQ - MP = 1$, we will have

$$E = h\left(-\left(\frac{ddp}{dX^2}\right) - \left(\frac{ddq}{dXdY}\right)\right) = -h\left(\frac{ddp}{dX^2}\right) - h\left(\frac{ddq}{dXdY}\right),$$
$$F = h\left(-\left(\frac{ddp}{dXdY}\right) - \left(\frac{ddq}{dY^2}\right)\right) = -h\left(\frac{ddq}{dY^2}\right) - h\left(\frac{ddp}{dXdY}\right),$$

and substituting these values, we will obtain these two equations following for the determination of the movement :

$$\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{ddp}{dX^2}\right) + 2gh\left(\frac{ddq}{dXdY}\right)$$

and

$$\left(\frac{ddq}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{ddq}{dY^2}\right) + 2gh\left(\frac{ddp}{dXdY}\right).$$

16. Writing the letters *x* and *y* in place of the letters *p* and *q*, in order to indicate better their agreement with the principal coordinates *X* and *Y*, and we will have the following solution. A particle of the air, which in the equilibrium state will be at *Y*, the coordinates being $AX = X$ and $XY = Y$, will find itself after some infinitely small disturbance, the time elapsed being $= t$, at the point *y*, of the coordinates which are put in place $Ax = X + x$ and $xy = Y + y$, the quantities *x* and *y* shall be as if infinitely small and certain functions of the three variables *X*, *Y* and *t* are put in place, the nature of which must be determined by the two equations following :

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddy}{dXdY}\right)$$

and

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddx}{dXdY}\right)$$

Hence everything comes about from the solution of these two equations, which is without doubt incomparably more difficult than that which we have found for the case of a single dimension, and which readily leads to these formulas, by putting $Y = 0$ and $y = 0$, from which one obtains

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dX^2}\right)$$

17. At first I note that it is possible to satisfy these equations by considering

$$x = B\,\Phi : (\alpha X + \beta Y + \gamma t)$$

and

$$y = C\,\Phi : (\alpha X + \beta Y + \gamma t)\,,$$

the symbol Φ indicating some one function of the adjoining quantity ; and it is required only to determine the constant quantities $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ B$ and C. Now, from that we deduce

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = B\gamma\gamma\ \Phi'' : (\alpha X + \beta Y + \gamma t),$$

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = C\gamma\gamma\ \Phi'' : (\alpha X + \beta Y + \gamma t),$$

$$\left(\frac{ddx}{dX^2}\right) = B\alpha\alpha\ \Phi'' : (\alpha X + \beta Y + \gamma t),$$

$$\left(\frac{ddx}{dXdY}\right) = B\alpha\beta\ \Phi'' : (\alpha X + \beta Y + \gamma t),$$

$$\left(\frac{ddy}{dY^2}\right) = C\beta\beta\ \Phi'' : (\alpha X + \beta Y + \gamma t),$$

$$\left(\frac{ddy}{dXdY}\right) = C\alpha\beta\ \Phi'' : (\alpha X + \beta Y + \gamma t),$$

where it is required to remember that, putting $v = \Phi : u$, I use the following signs to indicate the differentiation :

$$\frac{dv}{du} = \Phi' : u \quad\text{and}\quad \frac{ddv}{du^2} = \Phi'' : u.$$

18. Substituting these values and dividing by $\Phi'' : (\alpha X + \beta Y + \gamma t),$ we will obtain the two following equations :

$$\frac{B\gamma\gamma}{2gh} = B\alpha\alpha + C\alpha\beta \quad\text{and}\quad \frac{C\gamma\gamma}{2gh} = C\beta\beta + B\alpha\beta,$$

of which one divided by the other gives

$$\frac{B}{C} = \frac{B\alpha\alpha + C\alpha\beta}{C\beta\beta + B\alpha\beta} = \frac{\alpha}{\beta},$$

thus

$$B = \alpha \text{ and } C = \beta\,,$$

and finally,

$$\frac{\gamma\gamma}{2gh} = \alpha\alpha + \beta\beta$$

or

$$\gamma = \sqrt{2gh(\alpha\alpha + \beta\beta)}\ .$$

Now one can add together just as many functions as one would wish, and obtain :

$$x = \alpha\,\Phi : (\alpha X + \beta Y + t\sqrt{2gh(\alpha\alpha + \beta\beta)}) + \ \alpha'\Psi : (\alpha' X + \beta' Y + t\sqrt{2gh(\alpha'\alpha' + \beta'\beta')}) + \text{etc.},$$
$$y = \beta\,\Phi : (\alpha X + \beta Y + t\sqrt{2gh(\alpha\alpha + \beta\beta)}) + \beta'\Psi : (\alpha' X + \beta' Y + t\sqrt{2gh(\alpha'\alpha' + \beta'\beta')}) + \text{etc.},$$

where Φ, Ψ etc. indicate arbitrary functions ; but the same character signifies in one or the other expression the same function ; in fact, $\alpha,\ \beta,\ \alpha',\ \beta'$ etc. are arbitrary constant quantities.

19. So that we can see the solution more clearly, let P be some function of

$$\alpha X + \beta Y + t\sqrt{2gh(\alpha\alpha + \beta\beta)}\ ,$$

P' some function of

$$\alpha' X + \beta' Y + t\sqrt{2gh(\alpha'\alpha' + \beta'\beta')}\ ,$$

P'' a function of

$$\alpha'' X + \beta'' Y + t\sqrt{2gh(\alpha''\alpha'' + \beta''\beta'')}\ , \text{etc.},$$

where one can take any numbers for $\alpha,\ \beta,\ \alpha',\ \beta',\ \alpha'',\ \beta''$ etc. ;
and there will be the following formulas for the solution of the problem

$$x = \alpha P + \alpha' P' + \alpha'' P'' + \alpha''' P''' + \text{etc.},$$
$$y = \beta P + \beta' P' + \beta'' P'' + \beta''' P''' + \text{etc.}$$

If one considers here $t = 0$, one will have the state the first instant after the disturbance ; which being given, it will be necessary to determine conveniently the numbers $\alpha,\ \alpha',\ \beta,\ \beta'$ etc. Nevertheless it is most necessary that this solution shall be general, unless one had increased the number of formulas P, P', P'' etc. to infinity.

20. Making another attempt to resolve our two equations found (§16), which contain the solution to our problem. Putting

$$\left(\frac{dx}{dX}\right) + \left(\frac{dy}{dY}\right) = v\ ,$$

and our two equations will become

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=\frac{dv}{dX}$$

and

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=\frac{dv}{dY},$$

from which we deduce

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{d^3x}{dt^2dX}\right)=\left(\frac{ddv}{dX^2}\right)$$

and

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{d^3y}{dt^2dY}\right)=\left(\frac{ddv}{dY^2}\right).$$

Now, the first supposition gives

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right)=\left(\frac{d^3x}{dt^2dX}\right)+\left(\frac{d^3y}{dt^2dY}\right),$$

from which it follows

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddv}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddy}{dY^2}\right).$$

Thus it has reduced our problem to the discovery of a single function *v* of the three variables *t*, *X*, *Y*, which appears to be the most easy way to arrive at the solution.

21. Because we have just found

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=\left(\frac{dv}{dX}\right)$$

and

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=\left(\frac{dv}{dY}\right)$$

the subsequent differentiation gives

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{d^3y}{dt^2dY}\right)=\left(\frac{ddv}{dXdY}\right)=\frac{1}{2gh}\left(\frac{d^3y}{dt^2dX}\right).$$

Thus, putting

$$\left(\frac{dx}{dY}\right)=p \text{ and } \left(\frac{dy}{dX}\right)=q,$$

we will have

$$\left(\frac{ddp}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddq}{dt^2}\right),$$

from which, treating X and Y as constants, we deduce by integration

$$\frac{dp}{dt}=\frac{dq}{dt}+M\ ,$$

and

$$p=q+Mt+N,$$

where M and N are some functions of X and Y, of the kind that we have

$$\left(\frac{dx}{dY}\right)-\left(\frac{dy}{dX}\right)=Mt+N,$$

which being attached to one of our two main equations also will contain the solution of the problem.

22. From this last equation we conclude

$$\left(\frac{ddx}{dXdY}\right)=\left(\frac{ddy}{dX^2}\right)+t\left(\frac{dM}{dX}\right)+\left(\frac{dN}{dX}\right),$$

$$\left(\frac{ddy}{dXdY}\right)=\left(\frac{ddx}{dY^2}\right)-t\left(\frac{dM}{dY}\right)-\left(\frac{dN}{dY}\right)$$

and these formulas being substituted into our main equations will give

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddx}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddx}{dY^2}\right)-t\left(\frac{dM}{dY}\right)-\left(\frac{dN}{dY}\right),$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddy}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddy}{dX^2}\right)+t\left(\frac{dM}{dX}\right)+\left(\frac{dN}{dX}\right),$$

where it is necessary to note that *M* and *N* are functions of the two variables *X* and *Y* only and which do not contain the time *t*. From that one can still deduce a particular solution, taking some functions *M* and *N* of the two variables *X* and *Y*:

$$x=\alpha tX+t\left(\frac{dM}{dY}\right)+\gamma X+\left(\frac{dN}{dY}\right),$$

$$y=\beta tY-t\left(\frac{dM}{dX}\right)+\delta Y-\left(\frac{dN}{dX}\right).$$

For from that it follows

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=0,\quad\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=0,$$

$$\left(\frac{dx}{dX}\right)+\left(\frac{dy}{dY}\right)=v=(a+\beta)t+\gamma+\delta,$$

hence

$$\left(\frac{dv}{dX}\right)=0\quad\text{and}\quad\left(\frac{dv}{dY}\right)=0.$$

23. This particular solution must be added to the other particular solutions given above ; for, if the values $x=P$ and $y=Q$ may provide a solution and these also $x=P'$ and $y=Q'$, one will be able always to form a new more general solution

$$x=aP+\beta P'$$

and

$$y=\alpha Q+\beta Q'.$$

Now, above I have indicated an infinity of functions, each of which provides a solution to the problem, hence taking them all together and then finally attaching the values of x and *y* that I have just found here, and which do not seem to be included in the previous ones, one will have a much more general solution. However it is not yet apparent, how one must determine all these functions, because on putting $t=0$ one obtains a given initial disturbance. Yet, each particular solution refers to a certain initial state, which is assumed to take place, and one can assign for all time the disturbance taking place in the air.

24. In order to give an example of that, regarding this particular solution

$$x=\Phi:(X+t\sqrt{2gh})+\Psi:(X-t\sqrt{2gh}),$$
$$y=\Sigma:(Y+t\sqrt{2gh})+\Theta:(Y-t\sqrt{2gh}),$$

where characters $\Phi,\ \Psi,\ \Sigma,\ \Theta$ indicate arbitrary functions of the quantities to which they refer, with the exception of irregular and discontinuous functions. With that put in place, these formulas give the *x* and *y* displacements of each particle of air, not only for each time *t* proposed, whose situation in the equilibrium state is determined by the *X* and *Y* coordinates, but also the movement of the same particle, which one knows by the velocities following the direction of the coordinates, and these speeds shall be :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = (\ \Phi':(X+t\sqrt{2gh}) - \Psi':(X-t\sqrt{2gh}))\sqrt{2gh},$$

and

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = (\ \Sigma':(Y+t\sqrt{2gh}) - \Theta':(Y-t\sqrt{2gh}))\sqrt{2gh}.$$

25. Now, putting $t=0$ for the initial state, one will have

$$x = \Phi:X + \Psi:X,$$
$$y = \Sigma:Y + \Theta:Y$$

and

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = (\Phi':X - \Psi':X)\sqrt{2gh},$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = (\Sigma':Y - \Theta':Y)\sqrt{2gh}.$$

Hence, if from the beginning one has had

$$x = \Gamma:x,\ y = \Delta:Y,$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = \Lambda':X\cdot\sqrt{2gh},\quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = \Xi':Y\cdot\sqrt{2gh}$$

our functions will be determined by these kinds

$$\Phi:X + \Psi:X = \Gamma:\mathrm{X},$$
$$\Phi:X - \Psi:X = \Lambda:\mathrm{X},$$
$$\Sigma:Y + \Theta:Y = \Delta:Y,$$
$$\Sigma:Y - \Theta:Y = \Xi:Y,$$

and thus

$$\Phi:X = \tfrac{1}{2}\Gamma:X + \tfrac{1}{2}\Lambda:X,\quad \Psi:X = \tfrac{1}{2}\Gamma:X - \tfrac{1}{2}\Lambda:X,$$
$$\Sigma:Y = \tfrac{1}{2}\Delta:Y + \tfrac{1}{2}\Xi:Y,\qquad \Theta:X = \tfrac{1}{2}\Delta:X - \tfrac{1}{2}\Xi:Y,$$

from which our equations will be :

$$x = \tfrac{1}{2}\Gamma:(X + t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Lambda:(X + t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Gamma:(X - t\sqrt{2gh}) - \tfrac{1}{2}\Lambda:(X - t\sqrt{2gh}),$$

$$y = \tfrac{1}{2}\Delta:(Y + t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Xi:(Y + t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Delta:(Y - t\sqrt{2gh}) - \tfrac{1}{2}\Xi:(Y - t\sqrt{2gh}).$$

26. Supposing these functions such, that $\Gamma:u$, $\Lambda:u$, $\Delta:u$ and $\Xi:u$ shall always be equal to zero, except in the case $u = 0$, for which their values shall be infinitely small $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$, and one considers that the initial disturbance will be given such that for $X = 0$ and $Y = 0$ one has $x = \alpha$ and $y = \gamma$, that is the line of air *BC* (Fig. 3) has been pushed to *bc* and the line *DE* to *de*, all the rest of the air remaining undisturbed at the first instant ; the other functions express the speeds impressed on these lines of air at the start. With that in place, after some time *t*, which one may take

$$AP = AP' = t\sqrt{2gh} \text{ and } AL = AL' = t\sqrt{2gh},$$

and the whole line *QPR* will be displaced to *qr* by the interval

$$= \tfrac{1}{2}\Gamma:0 - \tfrac{1}{2}\Lambda:0 = \frac{\alpha - \beta}{2};$$

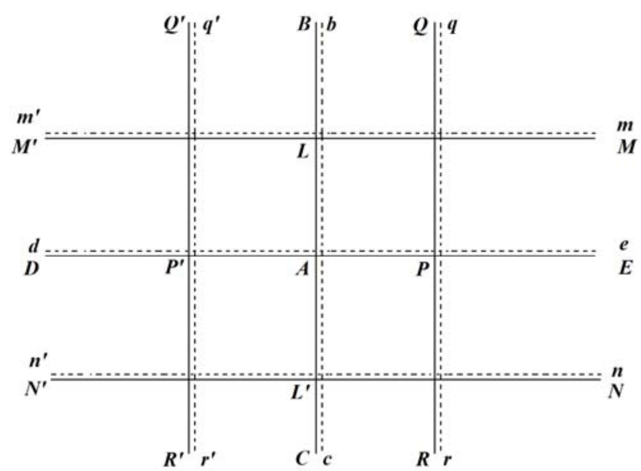

Fig. 3

now, on the other side the line *Q'P'R'* will be found at *q'r'* displaced by the interval

$$= \tfrac{1}{2}\Gamma:0 + \tfrac{1}{2}\Lambda:0 = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Next, the line *MLM'* will be carried to *mm'* through the interval $=\frac{\gamma-\delta}{2}$ and the line *NL'N'* to *nn'* by the interval $=\frac{\gamma+\delta}{2}$. Now all the rest remain undisturbed. Thus the initial disturbances according to the lines *BC* and *ED* are continued by these parallel lines, without disturbing each other mutually, with a speed of $\sqrt{2gh}$ [feet] per second.

27. For the case in which the original disturbance exists only in a very small region around the point *A*, it is evident that the disturbances will continue to be produced by concentric circles. Thus in this case, the displacements *x* and *y* will be proportionals to the coordinates *X* and *Y;* for this to arise we put

$$x = vX \quad \text{and} \quad y = vY\,,$$

and we will have :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = X\left(\frac{dv}{dt}\right),\ \left(\frac{dx}{dX}\right) = v + X\left(\frac{dv}{dX}\right),\ \left(\frac{dx}{dY}\right) = X\left(\frac{dv}{dY}\right),$$
$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = X\left(\frac{ddv}{dt^2}\right),\ \left(\frac{ddx}{dX^2}\right) = 2\left(\frac{dv}{dX}\right) + \left(\frac{ddv}{dX^2}\right),\ \left(\frac{ddx}{dXdY}\right) = \left(\frac{dv}{dY}\right) + X\left(\frac{ddv}{dXdY}\right)$$

and in the same manner :

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = Y\left(\frac{ddv}{dt^2}\right),\ \left(\frac{ddy}{dY^2}\right) = 2\left(\frac{dv}{dY}\right) + \left(\frac{ddv}{dY^2}\right),\ \left(\frac{ddy}{dXdY}\right) = \left(\frac{dv}{dX}\right) + Y\left(\frac{ddv}{dXdY}\right),$$

from which we may derive the main equations [§ 16] :

$$\frac{X}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = 3\left(\frac{dv}{dX}\right) + X\left(\frac{ddv}{dX^2}\right) + Y\left(\frac{ddv}{dXdY}\right),$$
$$\frac{Y}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = 3\left(\frac{dv}{dY}\right) + Y\left(\frac{ddv}{dY^2}\right) + X\left(\frac{ddv}{dXdY}\right).$$

28. But it is evident that *v* is a function only of the two variables *t* and $\sqrt{(XX+YY)}$ *;* thus we put

$$\sqrt{(XX+YY)} = Z \quad \text{and} \quad dv = Mdt + NdZ\,;$$

from which, since

$$dZ = \frac{XdX + YdY}{Z},$$

we derive

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) = M\,,$$

$$\left(\frac{dv}{dX}\right)=\frac{NX}{Z} \quad \text{and} \quad \left(\frac{dv}{dY}\right)=\frac{NY}{Z}$$

and then

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right)=\left(\frac{dM}{dt}\right)$$

and

$$\left(\frac{ddv}{dX^2}\right)=\frac{X}{Z}\left(\frac{dN}{dX}\right)+\frac{N}{Z}-\frac{NXX}{Z^3}=\frac{X}{Z}\left(\frac{dN}{dX}\right)+\frac{NYY}{Z^3},$$

$$\left(\frac{ddv}{dXdY}\right)=\frac{X}{Z}\left(\frac{dN}{dY}\right)-\frac{NXY}{Z^3},$$

$$\left(\frac{ddv}{dY^2}\right)=\frac{X}{Z}\left(\frac{dN}{dY}\right)+\frac{N}{Z}-\frac{NYY}{Z^3}=\frac{Y}{Z}\left(\frac{dN}{dY}\right)+\frac{NXX}{Z^3}.$$

Putting

$$dN=Pdt+QdZ=Pdt+\frac{QXdX+QYdY}{Z};$$

and then

$$\left(\frac{dN}{dX}\right)=\frac{QX}{Z}, \quad \left(\frac{dN}{dY}\right)=\frac{QY}{Z},$$

we will have

$$\left(\frac{ddv}{dX^2}\right)=\frac{QXX}{ZZ}+\frac{NYY}{Z^3},$$

$$\left(\frac{ddv}{dXdY}\right)=\frac{QXY}{ZZ}-\frac{NYY}{Z^3},$$

$$\left(\frac{ddv}{dY^2}\right)=\frac{QYY}{ZZ}+\frac{NXX}{Z^3}.$$

29. These values being substituted, our equations will become

$$\frac{X}{2gh}\frac{ddv}{dt^2}=\frac{3NX}{Z}+QX$$

and

$$\frac{Y}{2gh}\frac{ddv}{dt^2}=\frac{3NY}{Z}+QY,$$

and as a consequence are reduced to one

$$\frac{1}{2gh}\frac{ddv}{dt^2}=\frac{3N}{Z}+Q.$$

Now, since

$$N=\left(\frac{dv}{dz}\right) \text{ and } Q=\left(\frac{dN}{dz}\right)=\left(\frac{ddv}{dz^2}\right),$$

it is necessary to find such a function for v of the two variables t and Z which is satisfied by this equation

$$\frac{1}{2gh}\frac{ddv}{dt^2}=\frac{3}{Z}\left(\frac{dv}{dZ}\right)+\left(\frac{ddv}{dZ^2}\right).$$

Then some point Z (Fig. 4), of which the distance to the fixed point A in the undisturbed state is $AZ=Z$, will be transported after the time t by a distance

$$Zz=\sqrt{(xx+yy)}=vZ,$$

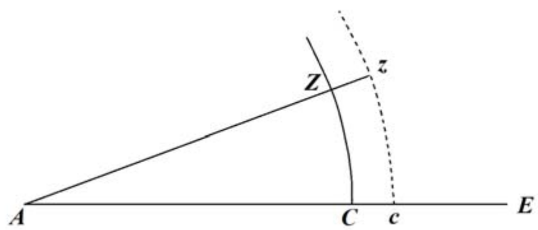

Fig. 4.

thus it will move itself away from the fixed point A. If we call this increase in distance $Zz=vZ=z$, because $v=\frac{z}{Z}$, we will have

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=-\frac{z}{ZZ}+\frac{1}{Z}\left(\frac{dz}{dZ}\right)+\left(\frac{ddz}{dZ^2}\right).$$

30. If this equation should allow such a solution so that it should become

$$z=P\,\Phi:(Z\pm t\sqrt{2gh}),$$

one could conclude that the propagation of the disturbances was made with the same speed as in the first hypothesis, which as a consequence would be less than according to experience. But such a form substituted for z would not satisfy our equation, from which one could conclude that the propagation of sound could well be made at a speed other than in this hypothesis. Yet one would not be able to conclude anything positive, before one should resolve the state of this general equation ; but, though one can easily assign several values, it is not apparent how one can be able to deduce the general value. For this reason one cannot bring too much care to the perfection of this part of analysis, which deals with the resolution of these kinds of equations.

THE SAME INVESTIGATION FOR THE HYPOTHESIS OF THREE DIMENSIONS

31. Considering some point Z in the equilibrium state (Fig. 5), the position of which must be determined by the three coordinates

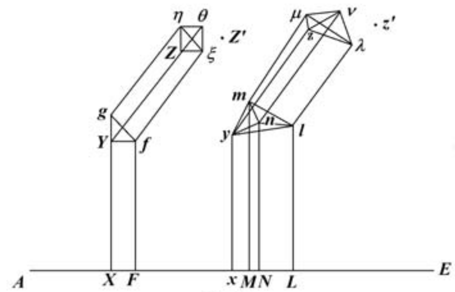

Fig. 5.

$$AX = X,\ XY = Y,\ YZ = Z.$$

Now, after a disturbance excited in the air at a given time, this same point has been transported to z, the place of which must be determined by three similar coordinates

$$Ax = x,\ xy = y,\ yz = z,$$

perpendicular between themselves. And it is evident that each one of these coordinates will be a certain function of the three original coordinates X, Y, Z, which correspond to the state of equilibrium ; thus putting

$$\begin{aligned} dx &= LdX + MdY + NdZ, \\ dy &= PdX + QdY + RdZ, \\ dz &= SdX + TdY + VdZ, \end{aligned}$$

for, although they contain the time t also, I do not yet take that into account, since I refer to all these investigations at the same time.

32. Now considering the state of equilibrium in an infinitely small pyramid of air $Z\zeta\eta\theta$ (Fig. 5), bounded by the four points Z, ζ, η, θ, to which correspond the coordinates as follows :

The point :	The three coordinates :		
Z	$X,$	$Y,$	$Z,$
ζ	$X+\alpha,$	$Y,$	$Z,$
η	$X,$	$Y+\beta,$	$Z,$
θ	$X,$	$Y,$	$Z+\gamma,$

this pyramid will be the one sixth part of the parallelepiped formed by the three sides $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, which I assume to be infinitely small. Thus, the volume of this pyramid will be $= \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$, the density of which is considered $=1$ and the elasticity expressed by the height h, so that a column of natural air of this height may be held in equilibrium by the elasticity.

33. Which after the disturbance this same pyramid has been transported to $z\lambda\mu\nu$, of which four corners each will be determined by the three following coordinates :

The point :	The three coordinates:		
z	$Ax = x,$	$xy = y,$	$yz = z,$
λ	$AL = x + L\alpha,$	$Ll = y + P\alpha,$	$l\lambda = z + S\alpha,$
μ	$AM = x + M\beta,$	$Mm = y + Q\beta,$	$m\mu = z + T\beta,$
ν	$AN = x + N\gamma,$	$Nn = y + R\gamma,$	$n\nu = z + V\gamma.$

Now, the volume of this pyramid is equal to [the volumes of the three elemental prisms ending in the vertex ν take the volume of the prism with the flat ends *yml* and $\mu z\lambda$]

$$ymnz\mu\nu + ylnz\lambda\nu + lmn\lambda\mu\nu - ylmz\lambda\mu$$

and hence, on taking the volume of each part [from the previous table],

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{1}{3}\,yln(yz + l\lambda + n\nu) \\ +\frac{1}{3}\,ymn\;(yz + m\mu + n\nu) \\ +\frac{1}{3}\,lmn\;(l\lambda + m\mu + n\nu) \\ -\frac{1}{3}\,ylm\;(yz + l\lambda + m\mu) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{3}\,yln(3z + S\alpha + V\gamma) \\ +\frac{1}{3}\,ymn(3z + T\beta + V\gamma) \\ +\frac{1}{3}\,lmn\big(3z + S\alpha + T\beta + V\gamma\big) \\ -\frac{1}{3}\,ylm(3z + S\alpha + T\beta) \end{array}\right.$$

which expression reduces to this :

$$\tfrac{1}{3}S\alpha \cdot \Delta ymn - \tfrac{1}{3}T\beta \cdot \Delta yln + \tfrac{1}{3}V\gamma \cdot \Delta ylm.$$

[e.g. $\Delta yln + \Delta lmn - \Delta ylm = -\Delta ymn$, etc.]

34. Now, the areas of these triangles may be found [as in E305] so that :

$$\begin{aligned} \Delta ymn &= \tfrac{1}{2}xM(xy + Mm) + \tfrac{1}{2}MN(Mm + Nn) - \tfrac{1}{2}xN(xy + Nn), \\ \Delta yln &= \tfrac{1}{2}xN(xy + Nn) + \tfrac{1}{2}LN(Ll + Nn) - \tfrac{1}{2}xL(xy + Ll), \\ \Delta ylm &= \tfrac{1}{2}xM(xy + Mm) + \tfrac{1}{2}LM(Ll + Mm) - \tfrac{1}{2}xL(xy + Ll), \end{aligned}$$

and therefore the areas of these triangles will be

$$\Delta ymn = \tfrac{1}{2}xM(2y + Q\beta) + \tfrac{1}{2}MN(2y + Q\beta + R\gamma) - \tfrac{1}{2}xN(2y + R\gamma)$$

or

$$\Delta ymn = \tfrac{1}{2} Q\beta \cdot xN - \tfrac{1}{2} R\gamma \cdot xM ;$$
$$\Delta yln = \tfrac{1}{2} xN\left(2y + R\gamma\right) + \tfrac{1}{2} LN\left(2y + P\alpha + R\gamma\right) - \tfrac{1}{2} xL\left(2y + P\alpha\right)$$

or

$$\Delta yln = \tfrac{1}{2} R\gamma \cdot xL - \tfrac{1}{2} P\alpha \cdot xN ;$$
$$\Delta ylm = \tfrac{1}{2} xM\left(2y + Q\beta\right) + \tfrac{1}{2} LM\left(2y + P\alpha + Q\beta\right) - \tfrac{1}{2} xL\left(2y + P\alpha\right)$$

or

$$\Delta ylm = \tfrac{1}{2} Q\beta \cdot xL - 2P\alpha \cdot xM .$$

Or

$$xL = L\alpha, \quad xM = M\beta \quad \text{et} \quad xN = N\gamma .$$

Thus,

$$\Delta ymn = \tfrac{1}{2} NQ\beta\gamma - \tfrac{1}{2} MR\beta\gamma = \tfrac{1}{2} \beta\gamma(NQ - MR),$$
$$\Delta yln = \tfrac{1}{2} LR\alpha\gamma - \tfrac{1}{2} NP\alpha\gamma = \tfrac{1}{2} \alpha\gamma\left(LR - NP\right),$$
$$\Delta ylm = \tfrac{1}{2} LQ\alpha\beta - \tfrac{1}{2} MP\alpha\beta = \tfrac{1}{2} \alpha\beta\left(LQ - MP\right).$$

35. From that we find the volume of our pyramid

$$-\tfrac{1}{6}\alpha\beta\gamma S(NQ - MR) - \tfrac{1}{6}\alpha\beta\gamma T\left(LR - NP\right) + \tfrac{1}{6}\alpha\beta\gamma V\left(LQ - MP\right)$$

and taking the density of the air there to be

$$\frac{1}{LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT}$$

and as a consequence, if we put Π for the height which measures the elasticity there, we will have

$$\Pi = \frac{h}{LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT} .$$

[Assuming again that the parcel of air obeys Boyle's law.]

This quantity will thus also be a function of the three variables *X*, *Y*, *Z*, and if we put

$$d\Pi = EdX + FdY + GdZ ,$$

the quantities *E*, *F*, *G* will be themselves easily determined by the differentiation of the value of Π, as

$$E = \left(\frac{d\Pi}{dX}\right), \quad F = \left(\frac{d\Pi}{dY}\right), \quad G = \left(\frac{d\Pi}{dZ}\right).$$

36. If we now consider in the equilibrium state a point Z' infinitely close to Z and determined by the three coordinates $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, it will now be at z' [in the disturbed state], on account of which the coordinates will be

$$x + LdX + MdY + NdZ,$$
$$y + PdX + QdY + RdZ,$$
$$z + SdX + TdY + VdZ.$$

Thus, if the position of the point z' infinitely close to z is given by the coordinates $x+\alpha,\ y+\beta,\ z+\gamma$, we can find the position in the equilibrium state. For if we put as an abbreviation,

$$LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT = K,$$

in order that $\Pi = \frac{h}{K}$, we will have

$$dX = \frac{\alpha(QV-RT)+\beta(NT-MV)+\gamma\left(MR-NQ\right)}{K},$$
$$dY = \frac{\alpha(RS-PV)+\beta(LV-NS)+\gamma\left(NP-LR\right)}{K},$$
$$dZ = \frac{\alpha\left(PT-QS\right)+\beta(MS-LT)+\gamma(LQ-MP)}{K}.$$

37. From the elasticity being at $z = \frac{h}{K} = \Pi$, at z' it will become

$$= \Pi + EdX + FdY + GdZ\ ;$$

thus, if we put for an abbreviation :

$$E\left(QV-RT\right) + F(RS-PV) + G\left(PT-QS\right) = A,$$
$$E(NT-MV) + F\left(LV-NB\right) + G(MS-LT) = B,$$
$$E(MR-NQ) + F\left(NP-LR\right) + G(LQ-MP) = C.$$

the elasticity at z' will become

$$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K}.$$

Now, the density at z is $\frac{1}{K}$. Thus, if we consider an infinitely small rectangular parallelepiped $zbcd\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 6), of which the sides shall be parallel to our three coordinates, and which we call

$$zb = \alpha,\ zc = \beta,\ za = \gamma\ ,$$

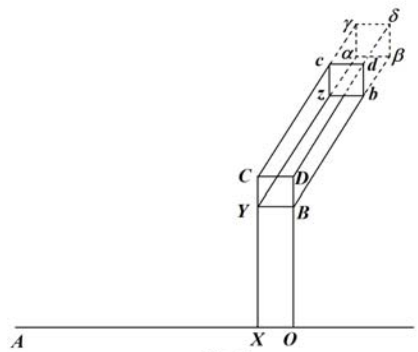

Fig. 6

the volume of this parallelepiped will be $\alpha\beta\gamma$ and the mass of the air which is contained therein $= \frac{\alpha\beta\gamma}{K}$.

38. Now considering the forces thus to be sought for this parallelepiped ; in order to do this, looking for the elasticity at each corner, which will be accomplished most easily by the three coordinates which correspond to each:

The point	The coordinates	The elasticity
z	$x,\quad y,\quad z$	Π
b	$x+\alpha\ ,\quad y,\quad z$	$\Pi + \frac{A\alpha}{K},$
c	$x\quad y+\beta\ ,\quad z$	$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta}{K},$
d	$x+\alpha\ ,\quad y+\beta\ ,\quad z$	$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta}{K},$
α	$x,\quad y,\quad z+\gamma$	$\Pi + \frac{C\gamma}{K},$
β	$x+\alpha\ ,\quad y,\quad z+\gamma$	$\Pi + \frac{A\alpha + C\gamma}{K},$
γ	$x,\quad y+\beta\ ,\quad z+\gamma$	$\Pi + \frac{B\beta + C\gamma}{K},$
δ	$x+\alpha\ ,\quad y+\beta\ ,\ z+\gamma$	$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K},$

39. To find the force by which the parallelepiped is pushed in the direction *AX*, considering the faces $zc\alpha\gamma$ and $bd\beta\delta$, and we see that that all the pressures on the face $bd\beta\delta$ exceed these which act on the other face $zc\alpha\gamma$ by the quantity $\frac{A\alpha}{K}$. Thus, the area of each of these two faces being $=\beta\gamma$, it results in a force along the direction *Ax*

$$=-\frac{A\alpha\beta\gamma}{K}.$$

In the same manner the forces which act on the face $cd\gamma\delta$ exceed these which act on the face $zb\alpha\beta$ by the amount $\frac{B\beta}{K}$; thus, the area of these faces being $=\alpha\gamma$, it results in a force along the direction *xy*

$$=-\frac{B\alpha\beta\gamma}{K}.$$

Finally, the forces which act on the face $a\beta\gamma\delta$ exceed these which act on the face *zbcd* by the amount $\frac{C\gamma}{K}$; thus, the area of these faces being $=\alpha\beta$, it results in a force along the direction *yz*

$$=-\frac{C\alpha\beta\gamma}{K}.$$

40. After finding the forces according to the directions of our three coordinates, the parallelepiped, the mass of which is $\frac{\alpha\beta\gamma}{K}$, will receive the following accelerations :

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=-2gA, \text{ along } Ax:,$$

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=-2gB, \text{ along } xy,$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=-2gC, \text{ along } yz,$$

where one only has to put in place the above assumed values for *A*, *B*, *C* . But here, considering the disturbances as extremely small, so taking these into account putting

$$x=X+p,\ y=Y+q \text{ and } z=Z+r,$$

so that p, q, r shall be as if infinitely small quantities ; and therefore one will have

$$dp = (L-1)dX + MdY + NdZ,$$
$$dq = PdX + (Q-1)dY + RdZ,$$
$$dr = SdX + TdY + (V-1)dZ.$$

41. Hence we will have approximately

$$L = 1,\ M = 0,\ N = 0,\ P = 0,\ Q = 1,\ R = 0,\ S = 0,\ T = 0,\ V = 1,$$

since $K = 1$, so that finally we need not consider the differentials ; but for the differential of Π we will have :

$$E = \left(\frac{d\,\Pi}{dX}\right) = -\left(\left(\frac{dL}{dX}\right) + \left(\frac{dQ}{dX}\right) + \left(\frac{dV}{dX}\right)\right)h,$$
$$F = \left(\frac{d\,\Pi}{dY}\right) = -\left(\left(\frac{dL}{dY}\right) + \left(\frac{dQ}{dY}\right) + \left(\frac{dV}{dY}\right)\right)h,$$
$$G = \left(\frac{d\,\Pi}{dZ}\right) = -\left(\left(\frac{dL}{dZ}\right) + \left(\frac{dQ}{dZ}\right) + \left(\frac{dV}{dZ}\right)\right)h.$$

Then we find

$$A = E,\ B = F,\ C = G$$

and finally, to eliminate the other letters, noting that

$$L = 1 + \left(\frac{dp}{dX}\right), \quad Q = 1 + \left(\frac{dq}{dY}\right), \quad V = 1 + \left(\frac{dr}{dZ}\right)$$

and besides the principal coordinates X, Y, Z with the time t we will have only the small quantities $p, q, r,$ which indicate the displacement of each point.

42. Thus substituting these values, and the motion of the air caused by some disturbance, but extremely small, will be determined by the three equations following :

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddq}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddr}{dXdZ}\right),$$
$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddq}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddq}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddr}{dXdZ}\right),$$
$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddr}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dXdZ}\right) + \left(\frac{ddq}{dYdZ}\right) + \left(\frac{ddr}{dZ^2}\right),$$

or, if we set

$$\left(\frac{dp}{dX}\right)+\left(\frac{dq}{dY}\right)+\left(\frac{dr}{dZ}\right)=v,$$

our equations take the following forms :

$$\left(\frac{ddp}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{dv}{dX}\right),\quad \left(\frac{ddq}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{dv}{dY}\right),\quad \left(\frac{ddr}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{dv}{dZ}\right),$$

from which we conclude :

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddv}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddv}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddv}{dZ^2}\right),$$

where there is a single unknown variable v only.

43. There then we have the solution of the problem on the propagation of sound having regard to all the dimensions of the air. An element of the air, of which the position in the equilibrium state has been determined by the three coordinates X, Y, Z, after a time t will be at a place determined by the coordinates $X+x,\ Y+y,\ Z+z$, where x, y, z are such functions of the four variables X, Y, Z and t the kind of which is expressed by the following equations :

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddx}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddy}{dXdY}\right)+\left(\frac{ddz}{dXdZ}\right),$$
$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddx}{dXdY}\right)+\left(\frac{ddy}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddz}{dYdZ}\right),$$
$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddx}{dXdZ}\right)+\left(\frac{ddy}{dYdZ}\right)+\left(\frac{ddz}{dZ^2}\right),$$

Or rather, putting

$$\left(\frac{dx}{dX}\right)+\left(\frac{dy}{dY}\right)+\left(\frac{dz}{dZ}\right)=v,$$

one will have

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{dv}{dX}\right),\quad \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{dv}{dY}\right),\quad \left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{dv}{dZ}\right),$$

and

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddv}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddv}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddv}{dZ^2}\right).$$

44. It is not difficult to find an infinitude of particular solutions ; one has only to put

$$x = A\,\Phi:(at+\beta X+\gamma Y+\delta Z),$$
$$y = B\,\Phi:(at+\beta X+\gamma Y+\delta Z),$$
$$z = C\,\Phi:(at+\beta X+\gamma Y+\delta Z),$$

and the following equalities will be obtained :

$$\frac{A\alpha\alpha}{2gh}=A\beta\beta+B\beta\gamma+C\beta\delta=\beta\left(A\beta+B\gamma+C\delta\right),$$
$$\frac{B\alpha\alpha}{2gh}=A\beta\gamma+B\gamma\gamma+C\gamma\delta=\gamma\left(A\beta+B\gamma+C\delta\right),$$
$$\frac{C\alpha\alpha}{2gh}=A\beta\delta+B\gamma\delta+C\delta\delta=\delta\left(A\beta+B\gamma+C\delta\right),$$

from which it follows

$$A=\beta,\ B=\gamma,\ C=\delta \text{ et } \alpha=\sqrt{2gh(\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta)}.$$

Now, one can take as wished the three numbers $\beta,\ \gamma,\ \delta$, and therefore one will have an infinitude of similar functions which being added together, will give suitable values for the unknowns *x*, *y*, *z*.

45. We will treat the case where the disturbances leave from a single point *A*, spreading out equally in all directions. Then one will have $x = Xs,\ y = Ys,\ z = Zs$ and *s* will be a function of the two quantities *t* and $\sqrt{(XX+YY+ZZ)}$. Putting $V=\sqrt{(XX+YY+ZZ)}$, of the kind that *V* indicates the distance of the point *Z* to the centre *A* in the equilibrium state ; and therefore

$$ds = dt\left(\frac{ds}{dt}\right)+dV\left(\frac{ds}{dV}\right)$$

or just as well,

$$ds = dt\left(\frac{ds}{dt}\right)+\frac{XdX}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)+\frac{YdY}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)+\frac{ZdZ}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right),$$

we will have

$$\left(\frac{dx}{dX}\right)=s+\frac{XX}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right),\quad \left(\frac{dy}{dY}\right)=s+\frac{YY}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right),\quad \left(\frac{dz}{dZ}\right)=s+\frac{ZZ}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right),$$

thus

$$\left(\frac{dx}{dX}\right)+\left(\frac{dy}{dY}\right)+\left(\frac{dz}{dZ}\right)=3s+V\left(\frac{ds}{dV}\right).$$

Now, having

$$\left(\frac{ds}{dX}\right)=\frac{X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right),\ \left(\frac{dV}{dX}\right)=\frac{X}{V}\quad\text{and}\quad\left(\frac{dds}{dVdX}\right)=\frac{X}{V}\left(\frac{dds}{dV^2}\right),$$

so that in general therefore

$$\left(\frac{du}{dX}\right)=\frac{X}{V}\left(\frac{du}{dV}\right),$$

setting $u=\left(\frac{ds}{dV}\right)$ we will have

$$\left(\frac{dds}{dXdV}\right)=\frac{X}{V}\left(\frac{dds}{dV^2}\right)$$

the first equation will become

$$\frac{X}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right)=\frac{3X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)+\frac{X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)+X\left(\frac{dds}{dV^2}\right)$$

or else

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right)=\frac{4}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)+\left(\frac{dds}{dV^2}\right)$$

and the others will lead to the same equation also.

46. The point Z will be increased in distance from the centre by the small interval $s\sqrt{(XX+YY+ZZ)}=Vs$; thus, if we put this interval $Vs=u$, because $s=\frac{u}{V}$ we will have

$$\left(\frac{dds}{dt^2}\right)=\frac{1}{V}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right),\quad \left(\frac{ds}{dV}\right)=-\frac{u}{VV}+\frac{1}{V}\left(\frac{du}{dV}\right)$$

and

$$\left(\frac{dds}{dV^2}\right)=\frac{2u}{V^3}-\frac{2}{VV}\left(\frac{du}{dV}\right)+\frac{1}{V}\left(\frac{ddu}{dV^2}\right),$$

from which the interval for the displacement *u* will be expressed by this equation :

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)=-\frac{2u}{VV}+\frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right)+\left(\frac{ddu}{dV^2}\right).$$

Thus it is from the resolution of this equation that the propagation of sound depends, extending through the air in all directions. Because this equation is different from that which we have found in two dimensions, the propagation of sound will be different also.

47. Now, to find a general solution of the formulas of § 43, one takes some function

O of $\alpha X+\beta Y+\gamma Z\pm t\sqrt{2gh(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}$,

O' some function $\alpha' X+\beta' Y+\gamma' Z\pm t\sqrt{2gh(\alpha'\alpha'+\beta'\beta'+\gamma'\gamma')}$,

O'' some function $\alpha'' X+\beta'' Y+\gamma'' Z\pm t\sqrt{2gh(\alpha''\alpha''+\beta''\beta''+\gamma''\gamma'')}$,

etc.

by increasing the number of such functions to infinity, since $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma'$ etc. are arbitrary numbers. Then *L, M, N, P, Q, R* shall be some functions of the three variables *X, Y, Z,* which do not include the time *t*, and one will have the following values for the variables sought *x, y, z*:

$$x=\alpha O+\alpha' O'+\alpha'' O''+\text{etc.}+t\left(\frac{dd(L-M)}{dYdZ}\right)+\left(\frac{dd(P-Q)}{dYdZ}\right),$$

$$y=\beta O+\beta' O'+\beta'' O''+\text{etc.}+t\left(\frac{dd(M-N)}{dXdZ}\right)+\left(\frac{dd(Q-R)}{dXdZ}\right),$$

$$z=\gamma O+\gamma' O'+\gamma'' O''+\text{etc.}+t\left(\frac{dd(N-L)}{dXdY}\right)+\left(\frac{dd(R-P)}{dZdY}\right),$$

from which one will know the speeds also

$$\left(\frac{dx}{dt}\right),\quad \left(\frac{dy}{dt}\right),\quad \left(\frac{dz}{dt}\right)$$

of each particle of air for each moment.

48. On setting $t = 0$, we will have the state the air finds itself in immediately after the first agitation has been expressed ; these formulas we have just found will indicate this instant as the three displacements *x*, *y*, *z*, occurring at each particle air, and the three speeds which have been expressed ; the initial state consists of these. However, this state being given, it is necessary to determine appropriately all functions *O*, *O '*, *O "* etc. with their respective numbers $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \alpha'',\ \beta'',\ \gamma''$, as well as the functions *L, M, N*, *P*, *Q*, *R*, for the resulting initial state to agree exactly with that proposed. But it is here that we encounter the greatest difficulty, and it is even doubtful if our formulas, with their numbers increasing to infinity, extend to all possible cases ; at least it would be much to wish for, that one might find a way to represent them in a finite and convenient form.

SUPPLEMENT AUX RECHERCHES SUR LA PROPAGATION DU SON

Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [16] (1759), 1766, p. 210-240

1. Dans le Mémoire précédent je n'ai supposé à l'air par lequel le son est transmis qu'une seule dimension selon une ligne droite; en quoi j'ai suivi les autres Géometres qui ont traité cette même matiere. Puisqu'on a principalement en vue la vitesse de la propagation, il semble qu'elle doit être la même, soit que l'air ait une étendue selon toutes les trois dimensions ou selon une seule, quoiqu'il soit certain que les ébranlemens excités dans l'air diminuent beaucoup plus considérablement, lorsque l'air est répandu de toutes parts. Mais la principale raison de cette restriction est sans doute, qu'on rencontre des difficultés insurmontables, lorsqu'on veut supposer à l'air une étendue vers tontes les trois dimensions, ou seulement vers deux, en ne considérant qu'une couche d'air renfermée entre deux plans paralleles et extrêmement proches.

2. Cependant il est encore douteux, si la vitesse du son, qu'on trouve dans l'hypothese d'une seule dimension, n'est pas altérée par l'étendue selon les autres dimensions, et puisque la vitesse actuelle du son conclue par les expériences est considérablement plus grande que celle que donne la théorie fondée sur l'hypothese d'une seule dimension, on a lieu de soupçonner que l'étendue vers toutes les dimensions pourrait bien causer cette accélération. Du moins sera-t-il toujours fort important de faire des efforts pour developer les autres hypotheses où l'on suppose à l'air ou deux ou toutes les trois dimensions; pour l'une et l'autre hypothese je tâcherai de ramener les ébranlemens de l'air à des formules analytiques, dont la résolution sera un très digne sujet pour occuper l'adresse des Géometres.

3. Je commence par l'hypothese de deux dimensions, ou l'air soit étendu selon un plan, qui soit celui de la planche; on lui peut donner une petite épaisseur, qui soit partout la meme $=e$, et d'abord je considere l'état d'équilibre, où l'air a partout la même densité et le même ressort. Que l'unité exprime cette densité naturelle de l'air, et que son élasticité soit en équilibre avec le poids d'une colonne d'air dont la hauteur soit $=h$, en supposant aussi cet air de l'état naturel, dont la densité $=1$; on voit bien que cette hauteur h se détermine par celle du barometre, en multipliant celle-ci par le rapport dont la densité ou gravité spécifique du vif argent surpasse celle de l'air. Ainsi la hauteur du barometre étant $=k$, si nous supposons la gravité spécifique du vif argent 14 fois plus grande que celle de l'eau, et celle-ci 800 fois plus grande que celle de l'air naturel, nous aurons

$$h = 14 \cdot 800k = 11200k.$$

4. Dans l'état d'équilibre considérons un point quelconque Y (Fig. 1) duquel on baisse à une ligne fixe AE la perpendiculaire YX, pour avoir les deux coordonnées $AX = X$ et $XY = Y$, qui déterminent le lieu du point Y. Maintenant, après une agitation quelconque excitée dans notre air, et à un instant donné, que le point Y se trouve en y, dont le lieu soit déterminé par les coordonnées $Ax = x$ et $xy = y$, et il est clair que x et y

seront certaines fonctions de X et Y, où le tems entre bien aussi, mais tant que nous considérons l'état de l'air pour le même instant, le tems n'y entre pas encore en considération, ou sera regardé comme constant.
Donc, puisque tant x que y est une fonction de deux variables X et Y, supposons

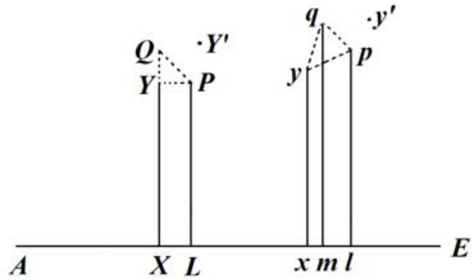

Fig. 1.

$$dx = LdX + MdY \text{ et } dy = PdX + QdY .$$

5. Pour trouver tant la densité que 1 'élasticité en y dans l'état troublé, considérons un volume d'air infiniment petit, qui dans l'état naturel soit YPQ, et après l'agitation dans l'état troublé soit ypq ; dont le rapport à celui-là fera connoitre tant la densité que l'élasticité du volume ypq. Comme le point Y déterminé par les coordonnées X et Y est transporté en y déterminé par les coordonnées x et y, tout autre point infiniment proche de Y et determine par les coordonnées $X + dX$ et $Y + dY$ sera transporté dans un point determine par les coordonnées

$$x + LdX + MdY \text{ et } y + PdX + QdY .$$

Que le triangle YPQ soit pris en sorte comme il est représenté dans la figure, et posons $YP = XL = \alpha$ et $YQ = \beta$, et

le point	dont les coordonnées			se trouvera	au point	dont les coordonnées		
Y	X	et	Y		y	x	et	y
P	$X+\alpha$	et	Y		p	$x+L\alpha$	et	$y+P\alpha$
Q	X	et	$Y+\beta$		q	$x+M\beta$	et	$y+Q\beta$

6. Donc, ayant tiré de p et q les ordonnées pl et qm, nous aurons

$$Ax = x,\ Al = x + L\alpha,\ Am = x + M\beta,$$
$$xy = y,\quad lp = y + P\alpha,\ mq = y + Q\beta,$$

d'où il faut chercher l'aire du triangle ypq, qui se détermine par celle des trapezes $xypl$, $xyqm$, $lpqm$ en sorte

$$\Delta ypq = \tfrac{1}{2} xm(xy + mq) + \tfrac{1}{2} ml(mq + lp) - \tfrac{1}{2} xl(xy + lp) ;$$

or

$$xm = M\beta,\ ml = L\alpha - M\beta \text{ et } xl = L\alpha ,$$

donc

$$\Delta ypq = \tfrac{1}{2} \beta M(2y + \beta Q) + \tfrac{1}{2} (\alpha L - \beta M)(2y + \alpha P + \beta Q) - \tfrac{1}{2} \alpha L(2y + \alpha P)$$

ou

$$\Delta ypq = \tfrac{1}{2}\beta M(-\ \alpha P) + \tfrac{1}{2}\alpha L(\beta Q) = \tfrac{1}{2}\alpha\beta(LQ - MP).$$

Donc, puisque dans l'état naturel l'aire du triangle *YPQ* étoit $\tfrac{1}{2}\alpha\beta$, la densité du même air remplissant maintenant le triangle *ypq* sera

$$= \frac{1}{LQ - MP}$$

et l' élasticité

$$= \frac{h}{LQ - MP};$$

d'où nous tirons cette conclusion: densité en *y*

$$= \frac{1}{LQ - MP},$$

l' élasticité en *y*

$$= \frac{h}{LQ - MP}.$$

7. Comme le lieu du point *y* dépend de celui de *Y*, le ressort ou élasticité en *y* (que l'on la pose $= \Pi$, de sorte que $\Pi = \dfrac{h}{LQ - MP}$) sera aussi une fonction de *X* et *Y*, considérant encore toujours le tems comme constant; et partant nous aurons $d\Pi = EdX + FdY$, où *E* et *F* sont déterminées en sorte des lettres, *L, M, P, Q*:

$$E = \frac{-h\left(Q\left(\frac{dL}{dX}\right) + L\left(\frac{dQ}{dX}\right) - P\left(\frac{dM}{dX}\right) - M\left(\frac{dP}{dX}\right)\right)}{(LQ - MP)^2},$$

$$F = \frac{-h\left(Q\left(\frac{dL}{dY}\right) + L\left(\frac{dQ}{dY}\right) - P\left(\frac{dM}{dY}\right) - M\left(\frac{dP}{dY}\right)\right)}{(LQ - MP)^2}.$$

C'est à dire un point *Y'* dans l'état d'équilibre infiniment proche de *Y*, déterminé par les coordonnées $X + dX$ et $Y + dY$, étant transporté par l'agitation en *y'*, l'élasticité y sera exprimée par la hauteur

$$\Pi + EdX + FdY,$$

pendant que l'élasticité en y répond à la hauteur

$$\Pi = \frac{h}{LQ - MP}.$$

8. Or, le lieu du point y' étant déterminé par les coordonnées

$$x + LdX + MdY \quad \text{et} \quad y + PdX + QdY,$$

nous pourrons assigner la variation du ressort depuis le point y dans l'état troublé jusqu'à un autre point y' infiniment proche. Soient pour le point y' les coordonnées $x+\alpha$ et $y+\beta$, prenant α et β pour marquer des élémens infiniment petits, et nous n'avons qu'à chercher le lieu Y' du même point dans l'état naturel. Pour cet effet posons

$$LdX + MdY = \alpha \quad \text{et} \quad PdX + QdY = \beta,$$

d'où nous tirons

$$dX = \frac{\alpha Q - \beta M}{LQ - MP} \quad \text{et} \quad dY = \frac{\beta L - \alpha P}{LQ - MP}$$

Donc, pour le point y' dans l'état troublé, déterminé par les coordonnées $x+\alpha$ et $y+\beta$, nous aurons l'élasticité exprimée par la hauteur

$$\Pi + \frac{\alpha(EQ - FP) + \beta(FL - EM)}{LQ - MP}.$$

9. Pour mieux développer cette valeur et celle des lettres E et F, il faut remarquer qu'ayant pose

$$dx = LdX + MdY \text{ et } dy = PdX + QdY,$$

nous aurons

$$\left(\frac{dL}{dY}\right) = \left(\frac{dM}{dX}\right) \text{ et } \left(\frac{dP}{dY}\right) = \left(\frac{dQ}{dX}\right)$$

et partant

$$E=\frac{h\left(P\left(\frac{dL}{dY}\right)-Q\left(\frac{dL}{dX}\right)-L\left(\frac{dP}{dY}\right)+M\left(\frac{dP}{dX}\right)\right)}{\left(LQ-MP\right)^2},$$

$$F=\frac{h\left(P\left(\frac{dM}{dY}\right)-Q\left(\frac{dL}{dY}\right)-L\left(\frac{dQ}{dY}\right)+M\left(\frac{dP}{dY}\right)\right)}{\left(LQ-MP\right)^2},$$

d'où nous tirons

$$EQ-FP=\frac{h\left(2PQ\left(\frac{dL}{dY}\right)-QQ\left(\frac{dL}{dX}\right)-(LQ+MP)\left(\frac{dP}{dY}\right)+MQ\left(\frac{dP}{dX}\right)+LP\left(\frac{dQ}{dY}\right)\right)}{\left(LQ-MP\right)^2},$$

$$FL-EM=\frac{h\left(2LM\left(\frac{dP}{dY}\right)-MM\left(\frac{dP}{dX}\right)-LL\left(\frac{dQ}{dY}\right)-(LQ+MP)\left(\frac{dL}{dY}\right)+MQ\left(\frac{dL}{dX}\right)+LP\left(\frac{dM}{dY}\right)\right)}{\left(LQ-MP\right)^2}.$$

Ensuite il faut aussi observer qu'il y a

$$L=\left(\frac{dx}{dX}\right),\ M=\left(\frac{dx}{dY}\right),\ P=\left(\frac{dy}{dX}\right),\ \text{et}\ \ Q=\left(\frac{dy}{dY}\right).$$

10. De là, si nous considérons dans l'état troublé un élément d'air *yprq* (Fig. 2) dont la figure soit rectangle, les côtés étant $yp=\delta$ et $yq=\varepsilon$ et pris paralleles à nos coordonnées, nous pourrons pour les quatre points *y*, *p*, *q*, *r* determiner l'élasticité. Car, ayant pour le point *y* l'élasticité $=\Pi$, pour le point *p*, dont les coordonnées sont $x+\delta$ et *y* (donc $a=\delta$ et $\beta=0$), l'élasticité, sera $=\Pi+\dfrac{\delta(EQ-FP)}{LQ-MP}$.
Ensuite pour le point *q*, dont les coordonnées sont *x* et $y+\varepsilon$ (donc $\alpha=0$ et $\beta=\varepsilon$), l'élasticité sera $=\Pi+\dfrac{\varepsilon(FL-EM)}{LQ-MP}$.
Et pour le point *r*, dont les coordonnées sont $x+\delta$ et $y+\varepsilon$ (donc $\alpha=\delta$ et $\beta=\varepsilon$) l'élasticité sera

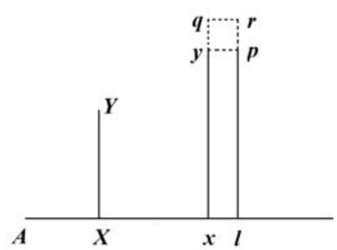

Fig. 2.

$$=\Pi+\frac{\delta(EQ-FP)+\varepsilon(FL-EM)}{LQ-MP},$$

d'où nous pourrons déterminer la pression de l'air sur les quatre côtés du rectangle *ypqr*.

11. Le côté $yp = \delta$ ayant une épaisseur $= e$ et partant l'aire $= \delta e$, puisque les pressions en *y* et *p* sont inégales, si nous prenons un milieu, la pression sur le côté *yp* sera égale au poids d'un volume d'air: pression sur *yp*

$$= \delta e\left(2\Pi + \frac{\delta(EQ - FP)}{2(LQ - MP)}\right).$$

De même sur le côté opposé *qr* nous aurons pression sur *qr*

$$= \delta e\left(2\Pi + \frac{\delta(EQ - FP) + 2\varepsilon(FL - EM)}{2(LQ - MP)}\right).$$

Ensuite sur le côté $yq = \varepsilon e$, nous aurons la pression sur *yq*

$$= \varepsilon e\left(2\Pi + \frac{\varepsilon(FL - EM)}{2(LQ - MP)}\right)$$

et de la même maniere pression sur *pr*

$$= \varepsilon e\left(2\Pi + \frac{2\delta(EQ - FP) + \varepsilon(FL - EM)}{2(LQ - MP)}\right).$$

Puisque la différence entre les forces en *y* et *q* est égale à celle des forces en *p* et *r*, on voit bien que l'inégalité des forces ne trouble point l'effet.

12. Puisque ces forces agissent perpendiculairement sur les côtés, l'élément *ypqr* sera poussé par les deux premieres forces suivant la direction *yx* par une force qui est

$$= \frac{\delta\varepsilon e\left(FL - EM\right)}{LQ - MP};$$

et les deux dernieres produisent ensemble une force

$$= \frac{\delta\varepsilon e\left(EQ - FP\right)}{LQ - MP}$$

selon *xA*. Ou bien l'élément *ypqr* sera poussé par les deux forces suivantes:
force suivant la direction *Ax*

$$= \frac{\delta\varepsilon e\left(FP - EQ\right)}{LQ - MP},$$

force suivant la direction *xy*

$$=\frac{\delta\varepsilon e\left(EM-FL\right)}{LQ-MP}.$$

Or le volume contenu dans ce rectangle *ypqr* étant $=\delta\varepsilon e$, si nous le multiplions par la densité $\frac{1}{LQ-MP}$, la masse sera $=\frac{\delta\varepsilon e}{LQ-MP}$.

13. Ayant trouvé ces forces sollicitantes, introduisons le tems *t*, et dans l'élément du tems *dt* nous pourrons assigner les accélérations suivant les mêmes directions. Si nous exprimons le tems *t* en secondes et que *g* marquee la hauteur d'où un corps pesant tombe dans une seconde, les principes de Mécanique nous fournissent les équations suivantes

$$\frac{\delta\varepsilon e}{LQ-MP}\cdot\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=2g\cdot\frac{\delta\varepsilon e\left(FP-EQ\right)}{LQ-MP}$$

et

$$\frac{\delta\varepsilon e}{LQ-MP}\cdot\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=2g\cdot\frac{\delta\varepsilon e\left(EM-FL\right)}{LQ-MP}$$

ou bien celles-ci

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=2g\cdot\left(FP-EQ\right)\ \text{et}\ \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=2g\cdot\left(EM-FL\right),$$

et maintenant il faut regarder *x* et *y* comme des fonctions non seulement des deux variables primitives *X* et *Y*, mais aussi du tems *t*.

14. Voilà la solution générale de notre probleme; mais, pour en faire l'application au cas que nous avons en vue, il faut regarder tous les changemens causés par l'agitation comme extrêmement petits, de même qu'on le suppose dans l'hypothese d'une seule dimension. Les différences entre *x* et *X*, de même qu'entre *y* et *Y*, seront donc extrêmement petites; pour tenir compte de cette circonstance, posons $x=X+p$ et $y=Y+q$; et les quantités *p* et *q* doivent être considérées comme évanouissantes. De là nous aurons

$$dX+dp=LdX+MdY\ \text{et}\ dY+dq=PdX+QdY$$

ou

$$dp=\left(L-1\right)dX+MdY\ \ \text{et}\ \ dq=PdX+\left(Q-1\right)dY,$$

et partant les quantités *M* et *P* seront extrêmement petites, et *L* et *Q* ne différeront de l'unité qu'extrêmement peu.

15. Donc, pour les agitations infiniment petites, nous aurons à peu près

$$L=1,\ M=0,\ P=0 \text{ et } Q=1,$$

et ensuite

$$L=1+\left(\frac{dp}{dX}\right),\quad M=\left(\frac{dp}{dY}\right),\quad P=\left(\frac{dq}{dX}\right),\quad Q=1+\left(\frac{dq}{dY}\right),$$

d'où nous tirons

$$\frac{dL}{dX}=\left(\frac{ddp}{dX^2}\right),\ \frac{dL}{dY}=\left(\frac{ddp}{dXdY}\right)=\left(\frac{dM}{dX}\right),\ \left(\frac{dM}{dY}\right)=\left(\frac{ddp}{dY^2}\right),$$
$$\left(\frac{dP}{dX}\right)=\left(\frac{ddq}{dX^2}\right),\ \left(\frac{dP}{dY}\right)=\left(\frac{ddq}{dXdY}\right)=\left(\frac{dQ}{dX}\right),\ \left(\frac{dQ}{dY}\right)=\left(\frac{ddq}{dY^2}\right).$$

De là, ayant $LQ-MP=1$, nous aurons

$$E=h\left(-\left(\frac{ddp}{dX^2}\right)-\left(\frac{ddq}{dXdY}\right)\right)=-h\left(\frac{ddp}{dX^2}\right)-h\left(\frac{ddq}{dXdY}\right),$$
$$F=h\left(-\left(\frac{ddp}{dXdY}\right)-\left(\frac{ddq}{dY^2}\right)\right)=-h\left(\frac{ddq}{dY^2}\right)-h\left(\frac{ddp}{dXdY}\right),$$

et substituant ces valeurs, nous obtiendrons les deux équations suivantes pour la détermination du movement

$$\left(\frac{ddp}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{ddp}{dX^2}\right)+2gh\left(\frac{ddq}{dXdY}\right)$$

et

$$\left(\frac{ddq}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{ddq}{dY^2}\right)+2gh\left(\frac{ddp}{dXdY}\right).$$

16. Au lieu des lettres *p* et *q* écrivons les lettres *x* et *y*, pour marquer mieux leur rapport avec les coordonnées principales *X* et *Y*, et nous aurons la solution suivante. Une particule d'air, qui dans l'état d'équilibre étoit en *Y*, les coordonnées étant $AX=X$ et $XY=Y$, se trouvera après une agitation infiniment petite quelconque, le tems écoulé étant $=t$, au point *y*, dont les coordonnées étant posées $Ax=X+x$ et $xy=Y+y$, les quantités *x* et *y* seront quasi infiniment petites et certaines fonctions des trois variables *X*, *Y* et *t*, dont la nature doit être déterminée par les deux équations suivantes

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddx}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddy}{dXdY}\right)$$

et

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddy}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddx}{dXdY}\right)$$

Tout revient donc à la résolution de ces deux équations, qui est sans doute incomparablement plus difficile que celle que nous avions trouvée pour le cas d'une seule dimension et qui se déduit aisément de ces formules, en posant $Y=0$ et $y=0$, d'où l'on obtient

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddx}{dX^2}\right)$$

17. D'abord j'observe qu'on peut satisfaire à ces deux équations en supposant

$$x=B\,\Phi:(\alpha X+\beta Y+\gamma t)$$

et

$$y=C\,\Phi:(\alpha X+\beta Y+\gamma t)$$

le signe Φ marquant une fonction quelconque de la quantité adjointe; et il ne s'agit que de déterminer les quantités constantes $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ B$ et C. Or, de là nous tirons

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=B\gamma\gamma\,\Phi'':(\alpha X+\beta Y+\gamma t),$$
$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=C\gamma\gamma\,\Phi'':(\alpha X+\beta Y+\gamma t),$$
$$\left(\frac{ddx}{dX^2}\right)=B\alpha\alpha\,\Phi'':(\alpha X+\beta Y+\gamma t),$$
$$\left(\frac{ddx}{dXdY}\right)=B\alpha\beta\,\Phi'':(\alpha X+\beta Y+\gamma t),$$
$$\left(\frac{ddy}{dY^2}\right)=C\beta\beta\,\Phi'':(\alpha X+\beta Y+\gamma t),$$
$$\left(\frac{ddy}{dXdY}\right)=C\alpha\beta\,\Phi'':(\alpha X+\beta Y+\gamma t),$$

où il faut se souvenir que, posant $v=\Phi:u$, je me sers des signes suivans
pour marquer la différentiation:

$$\frac{dv}{du} = \Phi':u \;\text{ et }\; \frac{ddv}{du^2} = \Phi'':u.$$

18. Substituant ces valeurs et divisant par $\Phi'':(\alpha X + \beta Y + \gamma t)$, nous obtiendrons les deux équations suivantes

$$\frac{B\gamma\gamma}{2gh} = B\alpha\alpha + C\alpha\beta \;\text{ et }\; \frac{C\gamma\gamma}{2gh} = C\beta\beta + B\alpha\beta,$$

dont 1 'une divisée par l'autre donne

$$\frac{B}{C} = \frac{B\alpha\alpha + C\alpha\beta}{C\beta\beta + B\alpha\beta} = \frac{\alpha}{\beta},$$

donc

$$B = \alpha \text{ et } C = \beta$$

et ensuite

$$\frac{\gamma\gamma}{2gh} = \alpha\alpha + \beta\beta$$

ou

$$\gamma = \sqrt{2gh(\alpha\alpha + \beta\beta)}\ .$$

Maintenant on pourra joindre autant de telles fonctions qu'on voudra et on aura

$$x = \alpha\,\Phi:(\alpha X + \beta Y + t\sqrt{2gh(\alpha\alpha + \beta\beta)}) + \alpha'\Psi:(\alpha' X + \beta' Y + t\sqrt{2gh(\alpha'\alpha' + \beta'\beta')}) + \text{etc.},$$
$$y = \beta\,\Phi:(\alpha X + \beta Y + t\sqrt{2gh(\alpha\alpha + \beta\beta)}) + \beta'\Psi:(\alpha' X + \beta' Y + t\sqrt{2gh(\alpha'\alpha' + \beta'\beta')}) + \text{etc.},$$

où Φ, Ψ etc. marquent des fonctions quelconques; mais le même charactere signifie dans l'une et l'autre expression la même fonction; or, $\alpha,\ \beta,\ \alpha',\ \beta'$ etc. sont des quantités constantes arbitraires.

19. Pour mettre cette solution plus clairement devant les yeux, soit *P* une fonction quelconque de

$$\alpha X + \beta Y + t\sqrt{2gh(\alpha\alpha + \beta\beta)}\ ,$$

P' une fonction quelconque de

$$\alpha' X + \beta' Y + t\sqrt{2gh(\alpha'\alpha' + \beta'\beta')}\ ,$$

P'' une fonction quelconque de

$$\alpha'' X + \beta'' Y + t\sqrt{2gh(\alpha''\alpha'' + \beta''\beta'')}\ , \text{ etc.},$$

où l'on peut prendre pour $\alpha,\ \beta,\ \alpha',\ \beta',\ \alpha'',\ \beta''$ etc. des nombres quelconques; et l'on aura pour la solution du probleme les formules suivantes

$$x=\alpha P+\alpha' P'+\alpha'' P''+\alpha''' P'''+\text{etc.},$$
$$y=\beta P+\beta' P'+\beta'' P''+\beta''' P'''+\text{etc.}$$

Si l'on suppose ici $t=0$, on aura l'état au premier instant après l'agitation; lequel étant donné, il en faut convenablement déterminer les nombres $\alpha,\ \alpha',\ \beta,\ \beta'$ etc. Cependant il s'en faut beaucoup que cette solution soit générale, à moins qu'on n'augmente à l'infini le nombre des formules *P*, *P'*, *P''* etc.

20. Faisons un autre effort pour résoudre nos deux équations trouvées (§16), qui renferment la solution de notre probleme. Posons

$$\left(\frac{dx}{dX}\right)+\left(\frac{dy}{dY}\right)=v,$$

et nos deux équations deviendront

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=\frac{dv}{dX}$$

et

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=\frac{dv}{dY},$$

d'où nous tirons

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{d^3x}{dt^2dX}\right)=\left(\frac{ddv}{dX^2}\right)$$

et

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{d^3y}{dt^2dY}\right)=\left(\frac{ddv}{dY^2}\right).$$

Or, la premiere supposition donne

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right)=\left(\frac{d^3x}{dt^2dX}\right)+\left(\frac{d^3y}{dt^2dY}\right),$$

d'où il s'ensuit

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddv}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddy}{dY^2}\right).$$

Voilà donc réduit notre probleme à l'invention d'une seule fonction *v* des trois variables *t*, *X*, *Y*, ce qui paroit être la route la plus aisée pour parvenir à la solution.

21. Puisque nous venons de trouver

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=\left(\frac{dv}{dX}\right)$$

et

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=\left(\frac{dv}{dY}\right)$$

la différentiation ultérieure donne

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{d^3y}{dt^2dY}\right)=\left(\frac{ddv}{dXdY}\right)=\frac{1}{2gh}\left(\frac{d^3y}{dt^2dX}\right).$$

Donc, posant

$$\left(\frac{dx}{dY}\right)=p \ \text{ et } \left(\frac{dy}{dX}\right)=q,$$

nous aurons

$$\left(\frac{ddp}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddq}{dt^2}\right),$$

d'où, traitant *X* et *Y* de constantes, nous en tirons par integration

$$\frac{dp}{dt}=\frac{dq}{dt}+M ,$$

et

$$p=q+Mt+N,$$

où *M* et *N* sont des fonctions quelconques de *X* et *Y*, de sorte que nous ayons

$$\left(\frac{dx}{dY}\right)-\left(\frac{dy}{dX}\right)=Mt+N,$$

laquelle étant jointe à l'une de nos deux équations principales contiendra aussi la solution du probleme.

22. De cette derniere équation nous concluons

$$\left(\frac{ddx}{dXdY}\right)=\left(\frac{ddy}{dX^2}\right)+t\left(\frac{dM}{dX}\right)+\left(\frac{dN}{dX}\right),$$

$$\left(\frac{ddy}{dXdY}\right)=\left(\frac{ddx}{dY^2}\right)-t\left(\frac{dM}{dY}\right)-\left(\frac{dN}{dY}\right)$$

et ces formules étant substituées dans nos équations principales donneront

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddx}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddx}{dY^2}\right)-t\left(\frac{dM}{dY}\right)-\left(\frac{dN}{dY}\right),$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddy}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddy}{dX^2}\right)+t\left(\frac{dM}{dX}\right)+\left(\frac{dN}{dX}\right),$$

où il faut remarquer que M et N sont des fonctions des deux variables X et Y seulement et qu'elles ne renferment point le tems t. De là on peut encore tirer une solution particuliere, prenant pour M et N des fonctions quelconques des deux variables X et Y:

$$x=\alpha tX+t\left(\frac{dM}{dY}\right)+\gamma X+\left(\frac{dN}{dY}\right),$$

$$y=\beta tY-t\left(\frac{dM}{dX}\right)+\delta Y-\left(\frac{dN}{dX}\right).$$

Car de là il s'ensuit

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=0,\quad \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=0,$$

$$\left(\frac{dx}{dX}\right)+\left(\frac{dy}{dY}\right)=v=(a+\beta)t+\gamma+\delta,$$

donc

$$\left(\frac{dv}{dX}\right)=0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dv}{dY}\right)=0.$$

23. Cette solution particuliere peut être jointe aux autres solutions particulieres données ci-dessus; car, si les valeurs $x=P$ et $y=Q$ fournissent une solution et aussi celles-ci $x=P'$ et $y=Q'$, on en pourra toujours former une solution nouvelle plus générale

$$x = aP + \beta P'$$

et

$$y = \alpha Q + \beta Q'.$$

Or, ci-dessus j'ai indiqué une infinité de fonctions, dont chacune fournit une solution du probleme; les prenant donc toutes ensemble et y joignant encore les valeurs de *x* et *y* que je viens de trouver ici en dernier lieu, et qui ne semblent pas être comprises dans les précédentes, on aura une solution infiniment plus générale. Cependant il ne paroit pas encore, comment on doit déterminer toutes ces fonctions, pour que, posant $t = 0$, on obtienne une agitation initiale donnée. Cependant chaque solution particuliere se rapporte à un certain état initial, lequel étant supposé avoir lieu, on en pourra assigner pour tout tems l'agitation qui aura lieu dans l'air.

24. Pour en donner un exemple, considérons cette solution particuliere

$$x = \Phi : (X + t\sqrt{2gh}) + \Psi : (X - t\sqrt{2gh}),$$
$$y = \Sigma : (Y + t\sqrt{2gh}) + \Theta : (Y - t\sqrt{2gh}),$$

où les caracteres $\Phi,\ \Psi,\ \Sigma,\ \Theta$ marquent des fonctions quelconques des quantités qui leur sont attachées, sans en excepter les fonctions irrégulieres et discontinues. Cela posé, ces formules donnent non seulement pour chaque tems proposé *t* les déplacemens *x* et *y* de chaque particule d'air, dont le lieu dans l'état d'équilibre est déterminé par les coordonnées *X* et *Y*, mais aussi le mouvement de cette même particule, qu'on connoit par les vitesses suivant la direction des coordonnées; et ces vitesses seront

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = (\ \Phi' : (X + t\sqrt{2gh}) - \Psi' : (X - t\sqrt{2gh}))\sqrt{2gh},$$

et

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = (\ \Sigma' : (Y + t\sqrt{2gh}) - \Theta' : (Y - t\sqrt{2gh}))\sqrt{2gh}.$$

25. Maintenant, pour l'état initial posant $t = 0$, on aura

$$x = \Phi : X + \Psi : X,$$
$$y = \Sigma : Y + \Theta : Y$$

et

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = (\Phi' : X - \Psi' : X)\sqrt{2gh},$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = (\Sigma' : Y - \Theta' : Y)\sqrt{2gh}.$$

Donc, si au commencement on a eu

$$x = \Gamma : x,\ y = \Delta : Y,$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = \Lambda' : X\sqrt{2gh}, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = \Xi' : Y\sqrt{2gh}$$

nos fonctions seront déterminées par celles-ci en sorte

$$\begin{aligned}
\Phi : X + \Psi : X &= \Gamma : \mathrm{X},\\
\Phi : X - \Psi : X &= \Lambda : \mathrm{X},\\
\Sigma : Y + \Theta : Y &= \Delta : Y,\\
\Sigma : Y - \Theta : Y &= \Xi : Y,
\end{aligned}$$

et partant

$$\Phi : X = \tfrac{1}{2}\Gamma : X + \tfrac{1}{2}\Lambda : X, \quad \Psi : X = \tfrac{1}{2}\Gamma : X - \tfrac{1}{2}\Lambda : X,$$
$$\Sigma : Y = \tfrac{1}{2}\Delta : Y + \tfrac{1}{2}\Xi : Y, \qquad \Theta : X = \tfrac{1}{2}\Delta : X - \tfrac{1}{2}\Xi : Y,$$

d'où nos équations seront

$$x = \tfrac{1}{2}\Gamma : (X + t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Lambda : (X + t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Gamma : (X - t\sqrt{2gh}) - \tfrac{1}{2}\Lambda : (X - t\sqrt{2gh}),$$

$$y = \tfrac{1}{2}\Delta : (Y + t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Xi : (Y + t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Delta : (Y - t\sqrt{2gh}) - \tfrac{1}{2}\Xi : (Y - t\sqrt{2gh}).$$

26. Supposons ces fonctions telles, que

$$\Gamma : u,\ \ \Lambda : u,\ \ \Delta : u \ \text{ et } \ \Xi : u$$

soient toujours égales à zéro, excepté les seuls cas où $u = 0$, auquel leurs valeurs soient $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ infiniment petites, et l'on voit que l'agitation initiale aura été telle que pour $X = 0$ et $Y = 0$ on a $x = \alpha$ et $y = \gamma$, c'est à dire la ligne d'air *BC* (Fig. 3) a été poussée en *bc* et la ligne *DE* en *de*, tout le reste de l'air demeurant en repos au premier instant; les autres fonctions expriment les vitesses imprimées à ces lignes d'air au commencenient. Cela posé, après un tems quelconque *t*, qu'on prenne

$$AP = AP' = t\sqrt{2gh} \ \text{ et } \ AL = AL' = t\sqrt{2gh}\,,$$

et toute la ligne *QPR* sera déplacée en *qr* par l'intervalle

$$= \tfrac{1}{2}\Gamma : 0 - \tfrac{1}{2}\Lambda : 0 = \frac{\alpha - \beta}{2}\,;$$

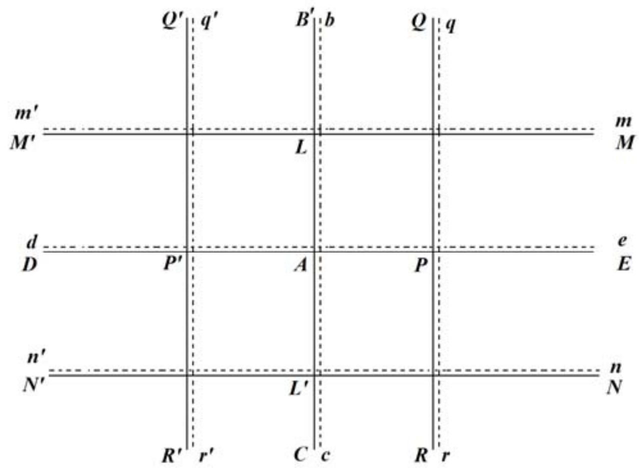

Fig. 3

or, de l'autre côté la ligne *Q'P'R'* se trouvera en *q'r'* par l'intervalle

$$=\tfrac{1}{2}\Gamma:0+\tfrac{1}{2}\Lambda:0=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

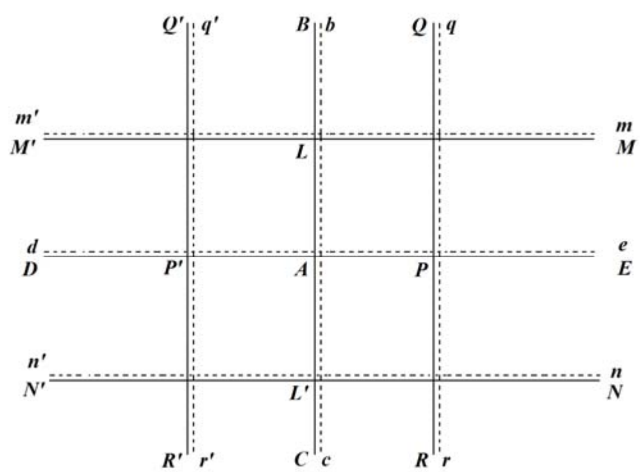

Fig. 3

Ensuite, la ligne *MLM'* sera transportée en *mm'* par l'intervalle $=\dfrac{\gamma-\delta}{2}$ et la ligne *NL'N'* en *nn'* par l'intervalle $=\dfrac{\gamma+\delta}{2}$. Or tout le reste sera en repos. Donc les ébranlemens originaires selon les lignes *BC* et *ED* sont continues par des lignes paralleles, sans se troubler mutuellement, avec une vitesse de $\sqrt{2gh}$ par seconde.

27. Pour le cas où l'agitation originaire n'aura subsisté que dans un très petit espace autour du point *A*, il est évident que les agitations produites se continueront par des cercles concentriques. Dans ce cas donc, les déplacemens *x* et *y* seront proportionnels aux coordonnées *X* et *Y;* pour cet effet posons

$$x = vX \quad \text{et} \quad y = vY$$

et nous aurons

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = X\left(\frac{dv}{dt}\right),\ \left(\frac{dx}{dX}\right) = v + X\left(\frac{dv}{dX}\right),\ \left(\frac{dx}{dY}\right) = X\left(\frac{dv}{dY}\right),$$
$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = X\left(\frac{ddv}{dt^2}\right),\ \left(\frac{ddx}{dX^2}\right) = 2\left(\frac{dv}{dX}\right) + \left(\frac{ddv}{dX^2}\right),\ \left(\frac{ddx}{dXdY}\right) = \left(\frac{dv}{dY}\right) + X\left(\frac{ddv}{dXdY}\right)$$

et de la même maniere

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = Y\left(\frac{ddv}{dt^2}\right),\ \left(\frac{ddy}{dY^2}\right) = 2\left(\frac{dv}{dY}\right) + \left(\frac{ddv}{dY^2}\right),\ \left(\frac{ddy}{dXdY}\right) = \left(\frac{dv}{dX}\right) + Y\left(\frac{ddv}{dXdY}\right),$$

d'où nos équations principales [§ 16] deviendront

$$\frac{X}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = 3\left(\frac{dv}{dX}\right) + X\left(\frac{ddv}{dX^2}\right) + Y\left(\frac{ddv}{dXdY}\right),$$
$$\frac{Y}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = 3\left(\frac{dv}{dY}\right) + Y\left(\frac{ddv}{dY^2}\right) + X\left(\frac{ddv}{dXdY}\right).$$

28. Mais il est évident que v est une fonction seulement des deux variables t et $\sqrt{(XX+YY)}$; posons donc

$$\sqrt{(XX+YY)} = Z \quad \text{et} \quad dv = Mdt + NdZ\ ;$$

d'où, puisque

$$dZ = \frac{XdX + YdY}{Z},$$

nous tirons

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) = M,$$
$$\left(\frac{dv}{dX}\right) = \frac{NX}{Z} \quad \text{et} \quad \left(\frac{dv}{dY}\right) = \frac{NY}{Z}$$

et ensuite

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{dM}{dt}\right)$$

et

$$\left(\frac{ddv}{dX^2}\right) = \frac{X}{Z}\left(\frac{dN}{dX}\right) + \frac{N}{Z} - \frac{NXX}{Z^3} = \frac{X}{Z}\left(\frac{dN}{dX}\right) + \frac{NYY}{Z^3},$$

$$\left(\frac{ddv}{dXdY}\right)=\frac{X}{Z}\left(\frac{dN}{dY}\right)-\frac{NXY}{Z^3},$$

$$\left(\frac{ddv}{dY^2}\right)=\frac{X}{Z}\left(\frac{dN}{dY}\right)+\ \frac{N}{Z}-\frac{NYY}{Z^3}=\frac{Y}{Z}\left(\frac{dN}{dY}\right)+\frac{NXX}{Z^3}.$$

Posons

$$dN=Pdt+QdZ=Pdt+\frac{QXdX+QYdY}{Z};$$

et puisque

$$\left(\frac{dN}{dX}\right)=\frac{QX}{Z},\quad \left(\frac{dN}{dY}\right)=\frac{QY}{Z},$$

nous aurons

$$\left(\frac{ddv}{dX^2}\right)=\frac{QXX}{ZZ}+\ \frac{NYY}{Z^3},$$
$$\left(\frac{ddv}{dXdY}\right)=\frac{QXY}{ZZ}-\frac{NYY}{Z^3},$$
$$\left(\frac{ddv}{dY^2}\right)=\frac{QYY}{ZZ}+\frac{NXX}{Z^3}.$$

29. Ces valeurs étant substituées, nos équations deviendront

$$\frac{X}{2gh}\frac{ddv}{dt^2}=\frac{3NX}{Z}+QX$$

et

$$\frac{Y}{2gh}\frac{ddv}{dt^2}=\frac{3NY}{Z}+QY$$

et se réduisent par conséquent à une seule

$$\frac{1}{2gh}\frac{ddv}{dt^2}=\frac{3N}{Z}+Q.$$

Or, puisque

$$N=\left(\frac{dv}{dz}\right)\ \text{ et }\ Q=\left(\frac{dN}{dz}\right)=\left(\frac{ddv}{dz^2}\right),$$

il s'agit de trouver pour v une telle fonction des deux variables t et Z qui satisfasse à cette équation

$$\frac{1}{2gh}\frac{ddv}{dt^2}=\frac{3}{Z}\left(\frac{dv}{dZ}\right)+\left(\frac{ddv}{dZ^2}\right).$$

Alors un point quelconque Z (Fig. 4), dont la distance au point fixe A est dans l'équilibre $AZ = Z$, sera transporté après le tems t par un espace

$$Zz=\sqrt{(xx+yy)}=vZ,$$

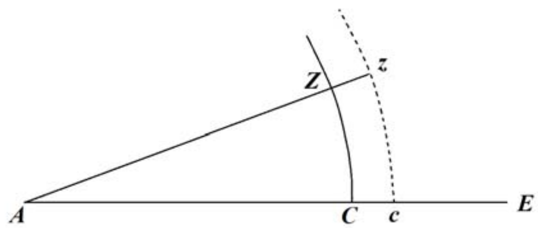

Fig. 4.

dont il s'éloignera du point fixe A. Si nous nommons cet éloignement $Zz = vZ = z$, de sorte que $v=\frac{z}{Z}$, nous aurons

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=-\frac{z}{ZZ}+\frac{1}{Z}\left(\frac{dz}{dZ}\right)+\left(\frac{ddz}{dZ^2}\right).$$

30. Si cette équation admettait une telle solution qu'il fût

$$z=P\ \Phi:(Z\pm t\sqrt{2gh}),$$

on en conclurait que la propagation des ébranle mens se fit avec la même vitesse que dans la premiere hypothese, qui seroit par conséquent moindre que selon l'expérience. Mais une telle forme substituée pour z ne satisfait point à notre équation, d'où l'on peut conclure que la propagation du son pourroit bien se faire avec une autre vitesse dans cette hypothese. Cependant on n'en sauroit rien conclure de positif, avant qu'on soit en état de résoudre généralement cette équation; mais, quoiqu'on en puisse aisément assigner plusieurs valeurs particulieres, il ne paroit pas comment on en pourrait déduire la valeur générale. Par cette raison on ne sauroit apporter trop de soins à perfecti,onner la partie de l'Analyse qui s'occupe à résoudre ces sortes d'équations.

CETTE MÊME RECHERCHE
POUR L'HYPOTHESE DE TROIS DIMENSIONS

31. Dans l'état d'équilibre considérons un point quelconque Z (Fig. 5), dont la position soit déterminée par les trois coordonnées

$$AX = X,\ XY = Y,\ YZ = Z.$$

Or, après une agitation excitée dans l'air pour un tems donné, ce même point ait été transporté en z, dont le lieu soit déterminé par de semblables trois coordonnées

$$Ax = x,\ xy = y,\ yz = z,$$

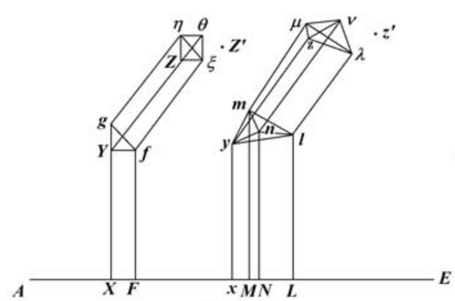

Fig. 5.

perpendiculaires entr'elles. Et il est clair que chacune de ces coordonnées sera une certaine fonction des trois principales X, Y, Z, qui répondent à l'état d'équilibre; posons donc

$$dx = LdX + MdY + NdZ,$$
$$dy = PdX + QdY + RdZ,$$
$$dz = SdX + TdY + VdZ,$$

car, quoiqu'elles renferment aussi le tems t, je n'en tiens pas encore compte, puisque je rapporte toutes ces recherches au même instant.

32. Considérons maintenant dans l'état d'équilibre une pyramide d'air infiniment petite $Z\zeta\eta\theta$ (Fig. 5), terminée par les quatre points Z, ζ, η, θ, auxquels répondent les coordonnées comme il suit:

du point	les trois coordonnées		
Z	$X,$	$Y,$	$Z,$
ζ	$X+\alpha,$	$Y,$	$Z,$
η	$X,$	$Y+\beta,$	$Z,$
θ	$X,$	$Y,$	$Z+\gamma,$

cette pyramide sera la sixieme partie du parallelepipede formé par les trois côtés $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, que je suppose infiniment petits. Donc, la solidité de cette pyramide sera $= \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$, dont la densité est supposée $=1$ et l'èlàsticité exprimée par la hauteur h, en sorte qu'une colonne d'air naturel de cette hauteur tienne l'élasticité en équilibre.

33. Qu' après l'agitation cette même pyramide ait été transportée en $z\lambda\mu\nu$, dont les quatre angles seront déterminés chacun par les trois coordonnées suivantes:

du point	les trois coordonnées		
z	$Ax = x,$	$xy = y,$	$yz = z,$
λ	$AL = x + La,$	$Ll = y + Pa,$	$l\lambda = z + S\alpha,$
μ	$AM = x + M\beta,$	$Mm = y + Q\beta,$	$m\mu = z + T\beta,$
ν	$AN = x + N\gamma,$	$Nn = y + R\gamma,$	$n\nu = z + V\gamma.$

Or, la solidité de cette pyramide est égale à

$$ymnz\mu\nu + ylnz\lambda\nu + lmn\lambda\mu\nu - ylmz\lambda\mu$$

et partant, en prenant la solidité de chaque part,

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{1}{3}yln(yz+l\lambda+nv) \\ +\frac{1}{3}ymn\ (yz+m\mu+nv) \\ +\frac{1}{3}lmn\ (l\lambda+m\mu+nv) \\ -\frac{1}{3}ylm\ (yz+l\lambda+m\mu) \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{3}yln(3z+S\alpha+V\gamma) \\ +\frac{1}{3}ymn(3z+T\beta+V\gamma) \\ +\frac{1}{3}lmn\left(3z+S\alpha+T\beta+V\gamma\right) \\ -\frac{1}{3}ylm(3z+S\alpha+T\beta) \end{array}\right.$$

laquelle expression se réduit à celle-ci

$$\tfrac{1}{3}S\alpha\cdot\Delta ymn-\tfrac{1}{3}T\beta\cdot\Delta yln+\tfrac{1}{3}V\gamma\cdot\Delta ylm.$$

34. Or, les aires de ces triangles se trouvent en sorte:

$$\Delta ymn=\tfrac{1}{2}xM(xy+Mm)+\tfrac{1}{2}MN(Mm+Nn)-\tfrac{1}{2}xN(xy+Nn),$$
$$\Delta yln=\tfrac{1}{2}xN(xy+Nn)+\tfrac{1}{2}LN(Ll+Nn)-\tfrac{1}{2}xL(xy+Ll),$$
$$\Delta ylm=\tfrac{1}{2}xM(xy+Mm)+\tfrac{1}{2}LM(Ll+Mm)-\tfrac{1}{2}xL(xy+Ll),$$

et partant les aires de ces triangles seront

$$\Delta ymn=\tfrac{1}{2}xM(2y+Q\beta)+\tfrac{1}{2}MN(2y+Q\beta+R\gamma)-\tfrac{1}{2}xN(2y+R\gamma)$$

ou

$$\Delta\ ymn=\tfrac{1}{2}Q\beta\cdot xN-\tfrac{1}{2}R\gamma\cdot xM;$$
$$\Delta yln=\tfrac{1}{2}xN\left(2y+R\gamma\right)+\tfrac{1}{2}LN\left(2y+P\alpha+R\gamma\right)-\tfrac{1}{2}xL\left(2y+P\alpha\right)$$

ou

$$\Delta yln=\tfrac{1}{2}R\gamma\cdot xL-\tfrac{1}{2}P\alpha\cdot xN\ ;$$
$$\Delta ylm=\tfrac{1}{2}xM\left(2y+Q\beta\right)+\tfrac{1}{2}LM\left(2y+P\alpha+Q\beta\right)-\tfrac{1}{2}xL\left(2y+P\alpha\right)$$

ou

$$\Delta ylm=\tfrac{1}{2}Q\beta\cdot xL-2P\alpha\cdot xM.$$

Or

$$xL=L\alpha,\quad xM=M\beta\quad \text{et}\quad xN=N\gamma.$$

Donc

$$\Delta ymn=\tfrac{1}{2}NQ\beta\gamma-\tfrac{1}{2}MR\beta\gamma=\tfrac{1}{2}\beta\gamma(NQ-MR),$$
$$\Delta yln=\tfrac{1}{2}LR\alpha\gamma-\tfrac{1}{2}NP\alpha\gamma=\tfrac{1}{2}\alpha\gamma\left(LR-NP\right),$$
$$\Delta ylm=\tfrac{1}{2}LQ\alpha\beta-\tfrac{1}{2}MP\alpha\beta=\tfrac{1}{2}\alpha\beta\left(LQ-MP\right).$$

35. De là nous trouvons la solidité de notre pyramide

$$-\tfrac{1}{6}\alpha\beta\gamma S(NQ-MR)-\tfrac{1}{6}\alpha\beta\gamma T\left(LR-NP\right)+\tfrac{1}{6}\alpha\beta\gamma V\left(LQ-MP\right)$$

et partant la densité de l'air y sera

$$\frac{1}{LQV-MPV+MRS-NQS+NPT-LRT}$$

et par conséquent, si nous posons Π pour la hauteur qui y mesure l'élasticité, nous aurons

$$\Pi=\frac{h}{LQV-MPV+MRS-NQS+NPT-LRT}\ .$$

Cette quantité sera donc aussi une fonction des trois variables *X*, *Y*, *Z*, et si nous posons

$$d\Pi=EdX+FdY+GdZ,$$

les quantités *E*, *F*, *G* se détermineront aisément par la différentiation de la valeur de Π, puisque

$$E=\left(\frac{d\Pi}{dX}\right),\quad F=\left(\frac{d\Pi}{dY}\right),\quad G=\left(\frac{d\Pi}{dZ}\right).$$

36. Si nous concevons dans l'état d'équilibre un point *Z'* infiniment proche de *Z* et déterminé par ces trois coordonnées *X* + *dX*, *Y*+ *dY*, *Z* + *dZ*, il se trouvera maintenant en *z'*, en sorte que les coordonnées seront

$$\begin{aligned}&x+LdX+MdY+NdZ,\\&y+PdX+QdY+RdZ,\\&z+\ SdX+TdY+VdZ.\end{aligned}$$

Donc, si la position du point *z'* infiniment proche de *z* est donnée par les coordonnées $x+\alpha,\ y+\beta,\ z+\gamma$, nous en pourrons trouver le lieu dans l'état d'équilibre. Car, si nous posons pour abréger

$$LQV-MPV+MRS-NQS+NPT-LRT=K,,$$

de sorte que $\Pi=\dfrac{h}{K}$, nous aurons

$$dX = \frac{\alpha(QV - RT) + \beta(NT - MV) + \gamma\left(MR - NQ\right)}{K},$$
$$dY = \frac{\alpha(RS - PV) + \beta(LV - NS) + \gamma\left(NP - LR\right)}{K},$$
$$dZ = \frac{\alpha\left(PT - QS\right) + \beta(MS - LT) + \gamma(LQ - MP)}{K}.$$

37. De là l'élasticité en z étant $= \frac{h}{K} = \Pi$, elle sera en z'

$$= \Pi + EdX + FdY + GdZ\ ;$$

donc, si nous posons pour abréger

$$E\left(QV - RT\right) + F(RS - PV) + G\left(PT - QS\right) = A,$$
$$E(NT - MV) + F\left(LV - NB\right) + G(MS - LT) = B,$$
$$E(MR - NQ) + F\left(NP - LR\right) + G(LQ - MP) = C.$$

l'élasticité en z' sera

$$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K}.$$

Or, la densité en z est $\frac{1}{K}$. Donc, si nous considérons un parallelepipede rectangle infiniment petit $zbcd\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 6), dont les côtés soient paralleles à nos trois coordonnées, et que nous nommions

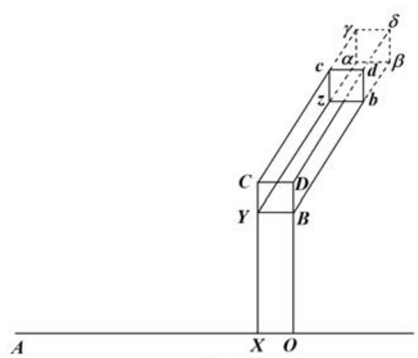

Fig. 6

$$zb = \alpha,\ zc = \beta,\ za = \gamma\ ,$$

la solidité de ce parallelepipede sera $\alpha\beta\gamma$ et la masse d'air qui y est contenue $= \frac{\alpha\beta\gamma}{K}$.

38. Voyons maintenant les forces dont ce parallelepipede sera sollicité; pour cet effet, cherchons l'élasticité à chacun de ses angles, ce qui se fera aisément par les trois coordonnées qui répondent à chacun:

du point	les coordonnées	l'élasticité
z,	x, y, z	Π

b	$x+\alpha\,,\quad y,\quad z$	$\Pi+\frac{A\alpha}{K}$,
c	$x\quad y+\beta\,,\quad z$	$\Pi+\frac{A\alpha+B\beta}{K}$,
d	$x+\alpha\,,\quad y+\beta\,,\quad z$	$\Pi+\frac{A\alpha+B\beta}{K}$,
α	$x,\quad y,\quad z+\gamma$	$\Pi+\frac{C\gamma}{K}$,
β	$x+\alpha\,,\quad y,\quad z+\gamma$	$\Pi+\frac{A\alpha+C\gamma}{K}$,
γ	$x,\quad y+\beta\,,\quad z+\gamma$	$\Pi+\frac{B\beta+C\gamma}{K}$,
δ	$x+\alpha\,,\quad y+\beta\,,\ z+\gamma$	$\Pi+\frac{A\alpha+B\beta+C\gamma}{K}$,

39. Pour trouver la force dont le parallelepipede est poussé vers la direction *AX*, considérons les faces $zc\alpha\gamma$ et $bd\beta\delta$, et nous voyons que toutes les pressions sur la face $bd\beta\delta$ surpassent celles qui agissent sur l'autre $zc\alpha\gamma$ de la quantité $\frac{A\alpha}{K}$. Donc, l'aire de chacune de ces deux faces étant $=\beta\gamma$, il en résulte une force selon la direction *Ax*

$$=-\frac{A\alpha\beta\gamma}{K}.$$

De la même maniere les forces qui agissent sur la face $cd\gamma\delta$ surpassent celles qui agissent sur la face $zb\alpha\beta$ de la quantité $\frac{B\beta}{K}$; donc, l'aire de ces faces étant $=\alpha\gamma$, il en résulte une force selon la direction *xy*

$$=-\frac{B\alpha\beta\gamma}{K}.$$

Enfin, les forces qui agissent sur la face $a\beta\gamma\delta$ surpassent celles qui agissent sur la face *zbcd* de la quantité $\frac{C\gamma}{K}$; donc, l'aire de ces faces étant $=\alpha\beta$, il en résulte une force dans la direction *yz*

$$=-\frac{C\alpha\beta\gamma}{K}.$$

40. Après avoir trouvé ces forces selon les directions de nos trois coordonnées,

le parallelepipede, dont la masse est $\frac{\alpha\beta\gamma}{K}$, recevra les accélérations suivantes:

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = -2gA, \text{ suivant } Ax:,$$

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -2gB, \text{ suivant } xy,$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = -2gC, \text{ suivant } yz,$$

où l'on n'a qu'à mettre pour *A*, *B*, *C* les valeurs supposées cidessus. Mais ici, considérant les agitations comme extrêmement petites, pour en tenir compte posons

$$x = X + p, \; y = Y + q \text{ et } z = Z + r,$$

de sorte que *p, q, r* soient des quantités quasi infiniment petites; et partant on aura

$$\begin{aligned} dp &= (L-1)dX + MdY + NdZ, \\ dq &= PdX + (Q-1)dY + RdZ, \\ dr &= SdX + TdY + (V-1)dZ. \end{aligned}$$

41. De là nous aurons à peu près

$$L = 1, \; M = 0, \; N = 0, \; P = 0, \; Q = 1, \; R = 0, \; S = 0, \; T = 0, \; V = 1,$$

donc $K = 1$, en tant que nous n'en considérions les différentiels; mais pour le différentiel de Π nous aurons

$$E = \left(\frac{d\Pi}{dX}\right) = -\left(\left(\frac{dL}{dX}\right) + \left(\frac{dQ}{dX}\right) + \left(\frac{dV}{dX}\right)\right)h,$$

$$F = \left(\frac{d\Pi}{dY}\right) = -\left(\left(\frac{dL}{dY}\right) + \left(\frac{dQ}{dY}\right) + \left(\frac{dV}{dY}\right)\right)h,$$

$$G = \left(\frac{d\Pi}{dZ}\right) = -\left(\left(\frac{dL}{dZ}\right) + \left(\frac{dQ}{dZ}\right) + \left(\frac{dV}{dZ}\right)\right)h.$$

Ensuite nous trouvons

$$A = E, \; B = F, \; C = G$$

et enfin, pour éliminer les autres lettres, remarquons que

$$L = 1 + \left(\frac{dp}{dX}\right), \quad Q = 1 + \left(\frac{dq}{dY}\right), \quad V = 1 + \left(\frac{dr}{dZ}\right)$$

et outre les coordonnées principales *X*, *Y*, *Z* avec le tems *t* nous n'aurons que les trois petites quantités *p*, *q*, *r*, qui marquent le déplacement de chaque point.

42. Substituons donc ces valeurs, et le mouvement de l'air causé par une agitation quelconque, mais extrêmement petite, sera déterminé par les trois équations suivantes:

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddq}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddr}{dXdZ}\right),$$
$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddq}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddq}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddr}{dXdZ}\right),$$
$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddr}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dXdZ}\right) + \left(\frac{ddq}{dYdZ}\right) + \left(\frac{ddr}{dZ^2}\right),$$

ou bien, si nous posons

$$\left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right) = v,$$

nos équations prendront les formes suivantes

$$\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dX}\right), \quad \left(\frac{ddq}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dY}\right), \quad \left(\frac{ddr}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dZ}\right),$$

d'où nous concluons

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddv}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddv}{dZ^2}\right),$$

où il n'y a qu'une seule variable inconnue, *v*.

43. Voilà donc la solution du probleme sur la propagation du son ayant égard à toutes les dimensions de l'air. Un élément d'air, dont le lieu dans l'état d'équilibre est déterminé par les trois coordonnées *X*, *Y*, *Z*, se trouvera après le tems *t* dans un lieu déterminé par les coordonnées $X + x$, $Y + y$, $Z + z$, où *x*, *y*, *z* sont telles fonctions des quatre variables *X*, *Y*, *Z* et *t* dont la nature est exprimée par les équations suivantes:

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddx}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddy}{dXdY}\right)+\left(\frac{ddz}{dXdZ}\right),$$
$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddx}{dXdY}\right)+\left(\frac{ddy}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddz}{dXdZ}\right),$$
$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddx}{dXdZ}\right)+\left(\frac{ddy}{dYdZ}\right)+\left(\frac{ddz}{dZ^2}\right),$$

Ou bien, posant

$$\left(\frac{dx}{dX}\right)+\left(\frac{dy}{dY}\right)+\left(\frac{dz}{dZ}\right)=v,$$

on aura

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{dv}{dX}\right),\quad \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{dv}{dY}\right),\quad \left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{dv}{dZ}\right),$$

et

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddv}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddv}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddv}{dZ^2}\right).$$

44. Il n'est pas difficile de trouver une infinité de solutions particulieres; on n'a qu'à poser

$$x = A\,\Phi:(at+\beta X+\gamma Y+\delta Z),$$
$$y = B\,\Phi:(at+\beta X+\gamma Y+\delta Z),$$
$$z = C\,\Phi:(at+\beta X+\gamma Y+\delta Z),$$

et l'on obtiendra les égalités suivantes:

$$\frac{A\alpha\alpha}{2gh}=A\beta\beta+B\beta\gamma+C\beta\delta=\beta\left(A\beta+B\gamma+C\delta\right),$$
$$\frac{B\alpha\alpha}{2gh}=A\beta\gamma+B\gamma\gamma+C\gamma\delta=\gamma\left(A\beta+B\gamma+C\delta\right),$$
$$\frac{C\alpha\alpha}{2gh}=A\beta\delta+B\gamma\delta+C\delta\delta=\delta\left(A\beta+B\gamma+C\delta\right),$$

d'où il s'ensuit

$$A=\beta,\ B=\gamma,\ C=\delta \text{ et } \alpha=\sqrt{2gh(\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta)}.$$

Or, on peut prendre à volonté les trois nombres $\beta,\ \gamma,\ \delta$, et partant on aura une infinité de pareilles fonctions qui, étant ajoutées ensemble, donneront des valeurs convenables pour les inconnues *x*, *y*, *z*.

45. Tirons de là le cas où les agitations partant d'un point *A* se répandent en tout sens également. Alors on aura $x = Xs,\ y = Ys,\ z = Zs$ et *s* sera une fonction des deux quantités *t* et $\sqrt{(XX+YY+ZZ)}$. Posons $V = \sqrt{(XX+YY+ZZ)}$, de sorte que *V* marque la distance du point *Z* au centre *A* dans l'état d'équilibre; et puisque

$$ds = dt\left(\frac{ds}{dt}\right) + dV\left(\frac{ds}{dV}\right)$$

ou bien

$$ds = dt\left(\frac{ds}{dt}\right) + \frac{XdX}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \frac{YdY}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \frac{ZdZ}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right),$$

nous aurons

$$\left(\frac{dx}{dX}\right) = s + \frac{XX}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right),\quad \left(\frac{dy}{dY}\right) = s + \frac{YY}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right),\quad \left(\frac{dz}{dZ}\right) = s + \frac{ZZ}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right),$$

donc

$$\left(\frac{dx}{dX}\right) + \left(\frac{dy}{dY}\right) + \left(\frac{dz}{dZ}\right) = 3s + V\left(\frac{ds}{dV}\right).$$

Maintenant, ayant

$$\left(\frac{ds}{dX}\right) = \frac{X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right),\ \left(\frac{dV}{dX}\right) = \frac{X}{V} \quad \text{et} \quad \left(\frac{dds}{dVdX}\right) = \frac{X}{V}\left(\frac{dds}{dV^2}\right),$$

car puisque en general

$$\left(\frac{du}{dX}\right) = \frac{X}{V}\left(\frac{du}{dV}\right)$$

posant $u = \left(\frac{ds}{dV}\right)$ nous aurons

$$\left(\frac{dds}{dXdV}\right) = \frac{X}{V}\left(\frac{dds}{dV^2}\right)$$

la premiere équation sera

$$\frac{X}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{3X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \frac{X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + X\left(\frac{dds}{dV^2}\right)$$

ou bien

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right)=\frac{4}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)+\left(\frac{dds}{dV^2}\right)$$

et à cette même équation aussi les autres conduiront.

46. Le point Z s'éloignera directement du centre par le petit intervalle $s\sqrt{(XX+YY+ZZ)}=Vs$; donc, si nous posons cet intervalle $Vs=u$, à cause de $s=\frac{u}{V}$ nous aurons

$$\left(\frac{dds}{dt^2}\right)=\frac{1}{V}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right),\quad \left(\frac{ds}{dV}\right)=-\frac{u}{VV}+\frac{1}{V}\left(\frac{du}{dV}\right)$$

et

$$\left(\frac{dds}{dV^2}\right)=\frac{2u}{V^3}-\frac{2}{VV}\left(\frac{du}{dV}\right)+\frac{1}{V}\left(\frac{ddu}{dV^2}\right),$$

d'où l'intervalle du déplacement. u sera exprimé par cette equation

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)=-\frac{2u}{VV}+\frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right)+\left(\frac{ddu}{dV^2}\right).$$

C'est donc de la résolution de cette équation que dépend la propagation du son par l'air étendu en tout sens. Puisque cette équation est différente de celle que nous avons trouvée pour le cas de deux dimensions, la propagation du son sera aussi différente.

47. Or, pour trouver une solution générale de nos formules du § 43, qu'on prenne

O fonction quelconque de $\alpha X+\beta Y+\gamma Z\pm t\sqrt{2gh(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}$,

O' fonction quelconque de $\alpha' X+\beta' Y+\gamma' Z\pm t\sqrt{2gh(\alpha'\alpha'+\beta'\beta'+\gamma'\gamma')}$,

O'' fonction quelconque de $\alpha'' X+\beta'' Y+\gamma'' Z\pm t\sqrt{2gh(\alpha''\alpha''+\beta''\beta''+\gamma''\gamma'')}$,

etc.

en augmentant le nombre de telles fonctions à l'infini, puisque $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma'$ etc. sont des nombres arbitraires. Ensuite soient L, M, N, P, Q, R des fonctions quelconques des trois variables X, Y, Z, sans qu'elles renferment le tems t, et on aura les valeurs suivantes pour les variables cherchées
x, y, z:

$$x=\alpha O+\alpha' O'+\alpha'' O''+\text{etc.}+t\left(\frac{dd(L-M)}{dYdZ}\right)+\left(\frac{dd(P-Q)}{dYdZ}\right),$$
$$y=\beta O+\beta' O'+\beta'' O''+\text{etc.}+t\left(\frac{dd(M-N)}{dXdZ}\right)+\left(\frac{dd(Q-R)}{dXdZ}\right),$$
$$z=\gamma O+\gamma' O'+\gamma'' O''+\text{etc.}+t\left(\frac{dd(N-L)}{dXdY}\right)+\left(\frac{dd(R-P)}{dZdY}\right),$$

d'où l'on connoitra aussi les vitesses

$$\left(\frac{dx}{dt}\right),\quad \left(\frac{dy}{dt}\right),\quad \left(\frac{dz}{dt}\right)$$

de chaque particule d'air pour chaque moment.

48. Posant ensuite $t=0$, on aura l'état où l'air se trouve immédiatement après la premiere agitation qui lui aura été imprimée; les formules que nous venons de trouver marqueront pour cet instant tant les trois déplacemens x, y, z, arrivés à chaque particule d'air, que les trois vitesses qui leur auront été imprimés; c'est en quoi consiste l'état initial. Or, cet état étant donné, il s'agit de déterminer convenablement toutes les fonctions O, O', O'' etc. avec leurs nombres respectifs $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \alpha'',\ \beta'',\ \gamma''$ etc., de même que les fonctions L, M, N, P, Q, R, pour que l'état initial qui en résulte convienne précisément avec celui qui est proposé. Mais c'est ici qu'on rencontre la plus grande difficulté, et il est encore fort douteux, si nos formules, quoiqu'on augmente leurs nombres à l'infini, s'étendent à tous les cas possibles; du moins seroit-il fort à souhaiter, qu'on trouvât moyen de les représenter sous une forme finie et plus commode.