CHAPTER 7

ON THE ADDITION AND SUBTRACTION OF FRACTIONAL NUMBERS

1. *If a fraction may be added to a whole number, then we only have to write the fraction after the whole number. Likewise, if a whole number together with a fraction may be added to another whole number, then we add the whole numbers together, and still attach the fraction to the whole sum. Whereas if we take a whole number from another larger whole number together with a fraction, we must take the whole numbers away, so that the smaller number is subtracted from the larger number and the remainder still contains the fraction.*

What has been notified here from the prescribed cases of addition and subtraction, is based entirely on the accepted way of expressing quantities consisting of whole and fractional numbers, and therefore requires no further proof. Then since for example $4\frac{3}{7}$ indicates as much as the whole number 4 and onto that still a three sevenths part be added, thus further it is clear, that, if we wish to add the whole number 4 and three sevenths, the sum thus must be expressed as $4\frac{3}{7}$. Therefore if a fraction shall be added to a whole number, thus we obtain the sum, if we write the fraction to the whole number. As if this fraction $\frac{24}{35}$ shall be added to this number 107, thus the sum will be $107\frac{24}{35}$. But if to some whole number another whole number with a fraction may be added, thus initially we may add only the whole numbers, and to the number arising still add the fraction, as in the following case. As if to 17 there shall be added $9\frac{5}{12}$, thus the sum shall be $26\frac{5}{12}$. Now if afterwards 17 were subtracted from $26\frac{5}{12}$, as we see from the above example, that the remainder must be $9\frac{5}{12}$; but this remainder is found, if we subtract 17 from 26, and for the amount left over, namely 9, the fraction $\frac{5}{12}$ added on. From which thus it is clear, how from a whole number together with a fraction another smaller whole number may be taken away. But these cases of the addition and subtraction are themselves so easy, that it would not have been necessary to report on them. Meanwhile we can see from that, that whole numbers, if they are combined with fractions, make both addition and subtraction more difficult; and show precisely in this case, that whoever has learned addition and subtraction with whole numbers, the same equally can be perform the operations with whole and fractional numbers. As if one understood already, that $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$ together amount to $\frac{5}{6}$, likewise also $5\frac{1}{2}$ and $6\frac{1}{3}$ added together can amount to $11\frac{5}{6}$. From this we see thus, that the greatest difficulty by the addition and subtraction with fractional numbers only is based on all fractions, and if whole numbers are combined with fractions, thereupon the operation is not made more difficult. Further, although, has been found in the previous chapter, whole numbers can be expressed by fractions, but here the transformation is not necessary, and the operation can be performed easier without it. How then to deal with mere fractions, we will explain in the following proposition.

2. *If two or more fractions, which are to be added together, all have the same denominator, thus we add the numerators together, and under the sum as one numerator we put the common denominator; since then this fraction will be the true sum of the fractions presented. Further by this fraction found can the above rules for the reduction of fractions into a simple form be indicated.*

If the given fractions have equal denominators, thus all the single parts can be designated a whole number, namely each fraction contains just as much of the equal parts as the numerator indicates. Therefore these fractions to be added together is nothing other than to be found, how many equal parts are to be contained altogether. Thus if we add all the numerators together, thus the sum is shown, how many of these equal parts all the fractions amount to altogether. Now since these such parts are, as the common denominator of the given fractions shows, thus the sum of the same fractions is a fraction, of which the denominator is the common denominator, but the numerator is the sum of the numerators. As if for example it were wished to add together these fractions $\frac{2}{25}$, $\frac{4}{25}$ and $\frac{6}{25}$, thus we see, that each single fraction, indicates namely a twenty-fifth part of a whole, the first of which contains 2, the second 4 and the third 6. All three together thus make 12 twenty-fifth parts of a whole, which thus is written as 12, and consequently is this fraction $\frac{12}{25}$, the denominator of which is the common denominator of the given fractions, but the numerator is equal to the sum of the numerators of the given fractions $\frac{2}{25}$, $\frac{4}{25}$ and $\frac{6}{25}$. Whereby it is now apparent, that the sum of two or more given fractions, which have the same denominator, to be a fraction, of which the denominator is the above common denominator, but the numerator is the sum of the numerators of the given fractions. Thus in order that two or more such fractions, which have equal denominators, to be added together, thus we add the bare numerators and under the sum we put the common denominator, since then this fraction is to be the true sum of the given fractions. If we want to have this sum expressed in the simplest and most convenient way, thus we see, on account of the whole fraction found contained in itself, and in such cases we extract the whole part from this and indicate the same by a whole number. Further, if the fraction found can be expressed by smaller numbers, thus it is customary also to bring the same into the smallest possible numbers.

If for example we were to add these numbers $\frac{7}{30}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{13}{30}$, thus the whole operation would come to be set down:

$$\begin{array}{c} \frac{7}{30} \\ \frac{11}{30} \\ \frac{13}{30} \\ \hline \text{Sum } \frac{31}{30}, \text{that is } 1\frac{1}{30}. \end{array}$$

Namely we find $\frac{31}{30}$, which fraction, while the numerator is greater than the denominator, amounts to more than a whole number, on that account we divide 31 by 30, and find for the quotient 1 and also the remainder 1, from which we see that $\frac{31}{30}$ shall be as great as $1\frac{1}{30}$

Further the following fractions $\frac{5}{48}$, $\frac{7}{48}$, $\frac{11}{48}$, $\frac{17}{48}$, and $\frac{20}{48}$ make into a sum together, as to be seen from the following operation :

$$\begin{array}{c} \frac{5}{48} \\ \frac{7}{48} \\ \frac{11}{48} \\ \frac{17}{48} \\ \frac{20}{48} \\ \hline \text{Sum } \frac{60}{48}, \text{that is } 1\frac{12}{48} \text{ or } 1\frac{1}{4}, \end{array}$$

while the numerator and denominator of $\frac{12}{48}$ can be divided by 12.

How much these fractions $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ amount to in a sum, is to be seen from the following operation :

$$\begin{array}{c} \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{5}{7} \\ \hline \text{Sum } \frac{14}{7}, \text{ that is } 2. \end{array}$$

If many suchlike fractions arise to be added, thus for brevity it is not necessary to add the denominator after each fraction in the operation, but it is enough to add the numerators only, and to note on the page the common denominator itself, thus this example can be reckoned in the shortest way as follows :

	5 (48	
	7	2 (7
7 (30	11	3
11	17	4
13	20	5
Sum : $\frac{30}{31}$, that is $1\frac{1}{30}$	$\frac{60}{48}$, that is $1\frac{1}{4}$	$\frac{14}{7}$, that is 2.

Therefore we will find this sum $\frac{16}{12}$ from these fractions $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{12}$ and $\frac{9}{12}$, that is $1\frac{1}{3}$. We see from this example, that the previous numbers are not given in the shortest form, but could have been given in this form $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$. But even if the same be expressed in this shorter manner, thus the previous form still serves for the addition much more, on account of the equal denominator, which is required for that. As these fractions $\frac{2}{3}$ and $\frac{1}{4}$ cannot be added in this manner.

But if we put $\frac{8}{12}$ for $\frac{2}{3}$ and $\frac{3}{12}$ for $\frac{1}{4}$, thus the sum, namely $\frac{11}{12}$, is easy to find. Now from this it is easy to understand, that, if fractions from unequal denominators must be added together, the same must be changed into another form, in which the denominators are equal; for which accordingly the following instructions must be given .

But for an example of whole and fractional numbers to be added together, consider these numbers proposed $5\frac{4}{15}$, $3\frac{7}{15}$, $9\frac{8}{15}$, and $\frac{1}{15}$, of which the sum must be found; which is done in the following manner:

$$\begin{array}{r} 5\frac{4}{15} \\ 3\frac{7}{15} \\ 9\frac{8}{15} \\ \frac{1}{15} \\ \hline \end{array}$$

Sum $17\frac{20}{15}$, that is $18\frac{5}{15}$ or $18\frac{1}{3}$.

Namely, $\frac{20}{15}$ is as much as $1\frac{5}{15}$, which added to 17 makes $18\frac{1}{3}$, and $\frac{5}{15}$ is reduced to $\frac{1}{3}$.

3. *If from two fractions, which have equal denominators, the smaller shall be subtracted from the greater, thus we take the smaller numerator from the greater and put the common denominator below the remainder, which fraction thereupon provides the fraction sought. But from a whole number along with a fraction should another whole number with an attached fraction be taken, of which the denominators of the given fractions are equal, thus the fraction of the smaller number may be taken from the fraction of the greater number, and the whole number of the smaller from the greater whole number, if the fraction of the greater number is greater than the fraction of the smaller number. But if the fraction of the greater number is smaller than the fraction of the smaller number, so must a whole number of the greater*

number be taken and added to the fraction, from that the subtraction can be done, but from this either the whole number of the greater is one smaller, or the whole number of the smaller can be considered greater by one.

The two fractions have equal denominators, since thereof the smaller fraction must be taken from the larger, thus the denominators hold equal parts of a whole, namely each fraction as many parts as the numerator indicates. If now we subtract the smaller fraction from the greater, thus we take the smaller number of such parts from the greater, that is, we subtract the smaller number from the greater, and under the remainder as the numerator we write the common denominator. As if $\frac{4}{15}$ is to be taken from $\frac{7}{15}$, so remains $\frac{3}{15}$, that is $\frac{1}{5}$ left over, whereby the subtraction of such fractions is easy to understand; therefore the following examples of subtraction will be enough for further clarification:

$\frac{4}{7}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{17}{30}$
$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{12}{30}$
Rem.: $\frac{2}{7}$	$\frac{2}{12}$, that is $\frac{1}{6}$	$\frac{5}{30}$, that is $\frac{1}{6}$.

Here now it is to be noted, which follows from the nature of fractions, that from the two fractions, which have the same denominator, this is the greater, which has the greater numerator ; thus if the numerators are equal to each other, then also the fractions are equal to each other and consequently the remainder is zero ; as $\frac{2}{3}$ from $\frac{2}{3}$ leaves 0. Let us now consider the numbers formed from two whole numbers and fractions, thus as the number is greater, in which the whole number is greater, if namely the fractions are smaller than a whole : thus $4\frac{1}{3}$ is more than $3\frac{2}{3}$, even if the fraction of the smaller is greater than the fraction of the greater. Now for two such numbers taken together the fractions have equal denominators, and together the fraction of the greater number also greater than the fraction of the smaller, so that the subtraction without difficulty, in that the whole from the whole, and the fraction from the fraction can be taken away, as $3\frac{2}{5}$ from $7\frac{4}{5}$ leaves $4\frac{2}{5}$ over ; the operation can be seen more from the following examples :

$10\frac{16}{21}$	$127\frac{19}{30}$
$5\frac{13}{21}$	$69\frac{11}{30}$
Rem.: $5\frac{3}{21}$, that is $5\frac{1}{7}$	$58\frac{8}{30}$, that is $58\frac{4}{15}$.

In a similar manner, if $6\frac{7}{12}$ shall be subtracted from $9\frac{7}{12}$, thus only 3 is left over, as the fractions are equal to each other and cancel each other.

But if the fraction of the greater number is smaller than the fraction of the smaller, thus we must, as done in the subtraction of whole numbers, from the greater whole number take a unit and to be added to the fraction, as to be seen in the following example:

$16\frac{3}{5}$	$347\frac{17}{36}$
$11\frac{4}{5}$	$209\frac{25}{36}$
Rem.:$4\frac{4}{5}$	$137\frac{28}{36}$, that is $137\frac{7}{9}$.

Here in the first example $11\frac{4}{5}$ must be taken from $16\frac{3}{5}$; thus we begin with the fractions of the smallest kind, and since $\frac{4}{5}$ cannot be taken from $\frac{3}{5}$, so we take one whole from the 16 whole numbers, which amounts to $\frac{5}{5}$, and added on to $\frac{3}{5}$, so that we have $\frac{8}{5}$; now from this we subtract $\frac{4}{5}$, so to leave the remainder $\frac{4}{5}$; now we must take 11 not from 16, but only from 15, since a unit has already been taken away from 16 . Or, which is equivalent, rather than reducing 16 by one, thus we can add one more to 11 and say : 12 from 16 leaves 4; thus in this example the remainder sought is $4\frac{4}{5}$. In the other example, since $209\frac{25}{36}$ must be taken from $347\frac{17}{36}$, likewise we take a whole or $\frac{36}{36}$ from 347 and add the same to $\frac{17}{36}$, so that we have $\frac{53}{36}$; $\frac{25}{36}$ taken away from that leaves $\frac{28}{36}$, that is $\frac{7}{9}$, as we can divide above and below by 4 . From here we must take 209 from 346 or, which is equivalent, 210 taken from 347, since then 137 remains behind, thus so that the remainder sought will be $137\frac{7}{9}$.

In this and in the above proposition it is thus enough to be shown, how both bare numbers as well as whole and fractional numbers taken together, if the fractions have equal denominators, either to be added or subtracted among themselves. Therefore it is still left to indicate, how we must proceed with fractions thus having unequal denominators. But here before all else it is to be observed, that such fractions cannot be treated otherwise, than to be changed so that they have equal denominators ; so that if these changes are made, then neither addition nor subtraction has any further difficulty. Therefore the whole matter follows on from this, that we know, how two or more fractions, which have unequal denominators, must be changed into another denominator and still shall be equal to the original value; but for that the following preparation is required.

4. *A common divisible number* (*communis dividuus*) *from two or more given numbers is such a number, which can divide each of the given numbers without a remainder. Now if two or more numbers are given, thus such a common divisible number is found, if we multiply the given numbers by each*

other. More suchlike common divisible numbers are found, if we multiply the first found each by an arbitrary number; from which it follows, that from two or more given numbers infinitely many common divisible numbers can be found.

Suppose the given numbers were 2, 3, 5; thus in accordance with that, all these numbers are common divisible numbers, which allow themselves to be divided by 2, 3 and 5, without a remainder ; thus 30 is such a common divisible number, as 30 can be divided by 2, 3 and 5. Further also 60, 90, 120, 150 and so forth are common divisible numbers of 2, 3 and 5. The given rule for finding such a common divisible number is easy to understand ; if we multiply the given numbers by one another, thus the product again is permitted through each of the given divisors and consequently from that is a common divisor number. Further it is clear also, that if a number is allowed to divide the given numbers, also the double, triple and so forth of the same divisible number multiplied by any arbitrary number, thereby itself is allowed to be a divisor; then each number which can be divided by the common divisible number is permitted also to be divided by the given divisible number. As by the given numbers 2, 3, 5, according to the rule initially we multiply 2 by 3 and that product 6 still by 5, thus 30 is the product of 2, 3, 5 and consequently a common divisible number of 2, 3 and 5. Further also all numbers, which can be divided by 30 , to be the divisible numbers of 2, 3 and 5; these are to be found, if we multiply 30 by an arbitrary number; as there are 60, 90, 120, 150 and so on further. But in order to make the operation somewhat easier according to the given rule, thus initially we find, if more than 2 numbers are given, only one common divisible number from the two first numbers; after that we take the third given number for the number found and search again from there a common divisor. To do this, we take the fourth given number and search again for a common divisible number; and so you continue until you have considered all the given numbers. As if from these numbers 2, 5, 7, 9 and 11 a common divisor number should be found, thus would the following operation be put in place:

$$\begin{array}{r}
5 \\
\underline{2} \\
10 \\
\underline{7} \\
70 \\
\underline{9} \\
630 \\
\underline{11} \\
63 \\
\underline{63} \\
6930
\end{array}$$

namely: initially we search for a common divisible number of 2 and 5, which happens, if we multiply 5 by 2 , since then 10 comes out. Further we seek a common divisible number of 10 and 7 , as we multiply 10 by 7 ; thus 70 already is a common divisible number of 2, 5 and 7. Finally we multiply the found number 70 by 9, thus the product 630 is a common divisible number of 70 and 9 and consequently also of 2, 5, 7 and 9. Finally we multiply 630 by 11, thus the product 6930 is a common divisible number of 2, 5, 7, 9 and 11, the same as requested.

However, it is to be observed, that often we can give a smaller divisible number, than can be found by this method by multiplication; in such cases it is now advisable, that we look for the smallest divisible number, as by means of which the calculation may be much shortened. Even though we are to be given the appropriate rule in the following, thus yet here we would like to bring forwards an example of such a case, so that we can form an idea of that in advance. Thus if a common divisible number may be sought from these numbers 2, 4, 6, 9 , so initially we take 2 by 4; from that we see, that 4 is a common divisible number which is smaller than that found by the given rule, namely 8. Thus we do not take but 4 instead, and with that 6, and look for a common divisible number of 4 and 6, which according to the rule would be 24; but we see, that 12 also to be divisible by 4 and 6, which lesser number we thus prefer. Finally we consider 12 and 9, and from there look for the smallest divisor, which is 36, since we had found 108 according to the rule. Thus 36 is a common divisible number of 2, 4, 6, 9, and that is the one which is much smaller than that, which has been established by the rule, namely 432. As therefore to be had in all such cases served by the following rule.

5. *The smallest common divisible number* (*Minimus communis dividuus*) *will be found of two numbers, if initially we search for the greatest common divisor thereof, and thereafter the product of both numbers to be divided by that; or what amounts to the same: we divide the one number by the greatest common divisor found, and we multiply the other number by that, since then the product shall be the smallest common divisible number.*

But if more than two numbers arise, thus we seek initially the smallest common divisible from two; hereafter we take this number and the third given number together and seek from that again the smallest common divisible; further again from this number and the fourth given number, and proceed so forth, until we have gone through all the given numbers : since then the last number found will be the smallest common divisible of all given.

[We would now call this number the least common multiple rather than the least common divisible number of two or more numbers.]

If the two given numbers are indivisible by each other, and thus their greatest common divisor is 1, there can be no smaller number than the product itself to be given thereby, which shall be allowed to divide both numbers together. But if the two given numbers have a common divisor besides 1, then always when we divide their product by this common divisor, the quotient from both the divisible numbers is consequently also a common divisible number, and that less than the product itself. Thus if we divide the product by the greatest common divisor, thus the quotient must be the smallest common divisible number of the two given numbers, as thus it is possible. But how the greatest common divisor of two numbers may be found, has already been shown above ; and by the same means we can thus always find out the smallest common divisible number of two given numbers. But it is much the same, whether we divide the product of the two given numbers by the greatest common divisor, or whether before the multiplication we divide one number by the greatest common divisor, and then multiply the quotient found by the other number.

In order to make this rule clearer by example, these numbers 9 and 15 are given, of which the smallest common divisible number is to be found, thus let these numbers 9 and 15 be provided, by which the smallest common divisible number shall be found. The greatest common divisor is 3; and if we divide the product, namely 135, by 3, thus 45 arises from this, of which the smallest common divisible number from 9 and 15 is 45. Just as this number will be found, if we divide a whole number, such as 9, by 3 and multiply the quotient 3 with another number, 15 ; or also, if we divide the other number by 3 and multiply that quotient 5 by the other number 9. Both these ways are commonly accustomed to be represented by cross-multiplication, thus :

$$3)\quad \begin{array}{cc} 9 & 15 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ 3 & 5 \\ \hline 45 & 45 \end{array}$$

Namely, we divide each number 9 and 15, by the greatest common divisor 3 and write the quotients 3 and 5, below. Hereupon we multiply each number by the quotient of the other through the cross, since then 45 arises on both sides, which is the given smallest common divisible number of both. But equally if only one of these operations were enough, thus nevertheless this twofold operation cannot be discarded as wholly useless: since then through both multiplications a product must arise, thus this operation serves equally as a test, that we have not erred in the calculation ; in so far as, if not a single number were to be found, the same would be a sure sign of an error. Thus if the smallest common divisible number were sought from 30 and 54, thus before all else it is necessary, that the greatest common divisor of these numbers be sought, which itself is 6 ; from this we construct the following operation:

$$6)\quad \begin{array}{cc} 30 & 54 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ 5 & 9 \\ \hline 270 & 270 \end{array}$$

From which thus it is apparent, that 270 shall be the sought smallest common divisible number. Further if the smallest common divisible number of 6 and 24 should be sought, thus we see easily, that 24 will be the same, as 24 is divisible by 6 and 24 . Just as this number nevertheless may also be found by the rule ; then since 6 is the greatest common divisor, thus the operation as follows arises from this :

$$6)\quad \begin{array}{cc} 6 & 24 \\ \times & \\ 1 & 4 \\ \hline 24 & 24 \end{array}$$

From this we see thus, that if the greater of the two given numbers is allowed to be divided by the smaller, thereupon the greater number itself to be the smallest common divisible number; in which cases thus it is not even necessary, to set out the prescribed operations.

Whoever now can find the smallest common divisible number from two given numbers, is also in a position at the same time, to find the smallest common divisible number of so many numbers, as are possible to be given. Then from the two given numbers we take two as we wish, and search for the smallest common divisible from these, which can be put in place of the same two given numbers, so that in such a way the total of given numbers accordingly is one smaller. Further we take again as we wish tow numbers and from that search for the smallest common divisible number, and put the same in place of the two given numbers themselves, so that the total of the numbers again is changed by one. We proceed forwards in such a manner thus, until we have brought all the given numbers down to two, the smallest common divisible number of which at once is the smallest common divisible number of all the given numbers. This rule is given from the same proposition only to be distinguished from that, according to which we always take each previous smallest common divisible number together with a new number, and from that the smallest common divisible number is sought; but according to this rule we can take two numbers as we wish, which are not yet drawn into the calculation. But this freedom of the latter rule is not without benefit; since we can always choose two such numbers, from which the smallest common divisible number can always be found most easily ; two such numbers of this kind, of which the greater is allowed to be divided by the smaller, then since the greater number is itself the smallest common divisible number, that we have mentioned already. Or we take two such numbers, of which the greater has already become the greatest common divider, and is thus the more trouble to catch up with, itself to use the above operation. But by such manipulations, which can be made by this rule, the whole operation can be greatly shortened; especially if we have got ourselves involved in a hard exercise. But we want to explain the use of this rule by a few examples.

From these numbers 4, 5, 6, 9, 10, 16 the smallest common divisible number is to be found. Here we can take first the numbers 4 and 16, how much 16 is allowed to be divided by 4 and consequently 16 is the smallest common divisible number. Instead of these two numbers 4 and 16 thus we only put 16, and have only still these following numbers 5, 6, 9, 10, 16, from which the smallest common divisible number is sought. Further we consider these numbers 5 and 10, of which the smallest common divisible number, as before is 10 and we have thus still only 6, 9, 10, 16. Now we take 6 and 9, of which the greatest common divider is 3, and consequently the smallest common divisible number is 18 ; and thus putting 18 in place of both the numbers 6 and 9, so that thus still only these three numbers 10, 16, 18 are present.

From here we take 10 and 16, of which the greatest common divisor is 2 and the smallest common divisible number 80 is found; so that now only these two numbers 18 and 80 are at hand. Finally from these two numbers we seek the smallest common divisible number, which is found to be 720, and this is also the smallest common divisible number of the previous numbers 4, 5, 6, 9, 10, 16. But the whole operation can be presented in the following easiest form :

$$\cancel{4},\ \cancel{5},\ \cancel{6},\ \cancel{9},\ \cancel{10},\ \cancel{16},$$
$$\cancel{18} \qquad \cancel{80}$$
$$720$$

Namely: we cancel out these numbers at once, through which others can be divided by the given numbers, namely 4 and 5. Hereafter for 6 and 9 we put 18, and for 10 und 16 we put 80. Finally for 18 and 80 we find 720, which is the smallest divisible number.

If the smallest common divisible number is to be sought from the numbers 6, 8, 9, 12, 15, 20, 25 , hence the operation can be put in place:

$$\cancel{6},\ \cancel{8},\ \cancel{9},\ \cancel{12},\ \cancel{15},\ \cancel{20},\ \cancel{25}$$
$$\cancel{72} \qquad \cancel{60}$$
$$\cancel{300}$$
$$1800$$

Initially we strike out 6, as that can divide into 12. In the second place for 8 and 9 we put the smallest common divisible from these, namely 8 and 9. Thirdly we strike out 12, as 72 can be divided by 12 . Fourthly for 15 and 20 we put 60 as the smallest common divisible number. Fifthly for 60 and 25 we put 300. Finally we have only the two numbers, 72 and 300, of which the greatest common divisor is 12 and consequently the smallest number commonly divisible by these numbers is 1800, which was sought.

From these numbers 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, thus the smallest number commonly divisible by these numbers is to be found :

$$\cancel{2},\ \cancel{3},\ \cancel{4},\ \cancel{5},\ \cancel{6},\ \cancel{7},\ \cancel{8},\ \cancel{9},\ \cancel{10}$$
$$\cancel{18} \qquad \cancel{40}$$
$$\cancel{126} \qquad 2520$$

In the first place 2, 3, 4 and 5 are to be struck off, as the same are divisors of given numbers. Hereafter for 6 and 9 we write 18, for 8 and 10 we put 40, for 7 and 18 we put 126; and finally for 126 and 40 we find 2520, which is the smallest common divisible number of all the given numbers.

The order, according to which we take the numbers, as mentioned already, is arbitrary and can be changed as we wish, if we draw only all the given numbers into consideration. But we may choose an order as we wish, so that we will always find at last a single number, which will be the smallest divisor number sought.

6. *Two or more fractions, which have unequal denominators, are able in the following manner to be changed into others of equal amounts, of which the denominators are equal. In the first place we take all the denominators of the given fractions and find from that the smallest common divisible number, which is considered as the common denominator of all the fractions. After doing this, we divided this common denominator by each denominator of all the given denominators, and then we multiply the quotients by the given numerators ; thus these products give the numerators of the sought fractions. In this manner thus we change the given fractions into others, which still are equal to the given values and thereby have the same denominator.*

From these matters, which have been introduced above concerning the nature of fractions, it is apparent, that we can change any fraction into another, of which the denominator is twice, three times, or more greater than the given denominator; this happens namely, if we multiply both the numerator as well as the denominator of the given fraction by 2, 3, or some other arbitrary number. Therefore we can always change a fraction into another, of which the denominator is given, only if this denominator can be divided by that one.

As this number $\frac{3}{4}$ can be changed into another, of which the denominator is 12, while 12 can be divided by 4, and gives 3 namely for the quotient. Now while the new denominator is 3 times as great as the old, so must also the new numerator be 3 times greater than the old, and therefore the new fraction is found $\frac{9}{12}$. Further if this fraction $\frac{7}{10}$ must be changed into another of which the denominator shall be 50, so we divide 50 by the above denominator, and we multiply the quotient 5 by the above numerator 7; so this product 35 gives the numerator of the new fraction ; whereby thus the changed fraction will be $\frac{35}{50}$, which also, as it is easy to see, is equal to the above fraction $\frac{7}{10}$; then if we multiply the denominator and numerator of this fraction by 5, this fraction arises $\frac{35}{50}$. Thus if a fraction should be brought into another form, of which the denominator is given, but so that the same can itself be divided by the denominator of the given fraction, thus the new fraction be found very easily in this way. We divide the new denominator by the old, and multiply the old numerator by the quotient, thus this product gives the new numerator. From this we now see easily, that if two or more fractions, thus having unequal denominators, must be changed into another form, in which they have the same denominator, as then these common denominators must themselves be procured so that the same can be divided by each denominator of the given fraction : consequently thus the common denominator is to be a common divisible number of the previous denominator. On account of which two or more fractions are to be changed into others, which have a common denominator, thus initially we must search for a common divisible number from the given denominators and the same for the assumed common denominator. Accordingly each fraction can be changed into another according to the given rule, of which the denominator is the common divisible number found ; and thus all these fractions found have a common denominator. As if these fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$ were to be changed into others, which have the same common denominator, thus at first we search for a common divisible number, which is found to be 60. Thereafter we change each fraction into another, of which the denominator is 60 ; thus this fraction $\frac{2}{3}$ will be changed into $\frac{40}{60}$, this one $\frac{3}{4}$ into $\frac{45}{60}$ and this one $\frac{1}{5}$ into $\frac{12}{60}$, so that instead of the given fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, we will have these $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{12}{60}$, which, as were required, have the same denominator. Now this operation is accustomed to be called the reduction of fractions to the same denominator; and to bring fractions to the same denominator is nothing other than to change the given fractions into others of which the denominators are equal to each other. Now while this operation is based on finding a common divisible number from the denominators of the given fractions, but suchlike common divisor numbers can be assumed indefinitely, thus it is clear, that the reduction of fractions to equal denominators can be performed in an endless number of ways. But it is easy to consider, that this method, which gives the smallest common denominator, deserves to be chosen from all the other possibilities. Then by that the calculation is considerably shortened, if the reduction of fractions to equal denominators is performed with the smallest possible numbers. But this advantage will be achieved, if we assume the smallest common divisible number for the common denominator of the sought fractions. Therefore, we have to take this rule into account in the reduction of the fractions to equal denominators : Initially we seek the smallest common divisible number of all the given denominators; and put the same for the common denominator of the sought fractions. Then, in order to find the corresponding numerators, thus we divide this common denominator by the denominator of each given fraction ; and multiply the numerators of the same fractions by the quotient, thus we have the sought numerators. But this whole operation will be explained more by the following example.

In the first place these fractions $\frac{5}{12}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{7}{20}$ and $\frac{4}{21}$ to be given the same denominators or to changed into other denominators equal to each other. Thus we look before anything else for the smallest common divisible number of the given denominators

$$\begin{array}{cccc} \cancel{12} & \cancel{15} & \cancel{20} & \cancel{21} \\ \cancel{60} & & 420 & \end{array}$$

as taught above, which is 420. Now this number is assumed for the common denominator of the sought fractions; moreover, these fractions are to be found in the following manner :

$\frac{5}{12}$	$\frac{175}{420}$	35
$\frac{8}{15}$	$\frac{224}{420}$	28
$\frac{7}{20}$	$\frac{147}{420}$	21
$\frac{4}{21}$	$\frac{80}{420}$	20

Namely, after we have removed the crossed out fractions, thus under each the common denominator 420 is written; then we divide each common denominator by each denominator of the given fraction and put the quotients further to the right; as 420 divided by 12 gives 35, and 420 divided by 15 gives 28, and 420 divided by 20 gives 21, and 420 divided by 21 gives 20. Finally we multiply these quotients by the numerators of the given fractions and write the product in place of the numerators of the sought fractions. As 5 times 35 gives 175, and 8 times 28 gives 224, and so forth. When these are done, thus we have the required fractions of each denominator to write down, which are separated from each other by a line. The diagram of the operation can be altered according to one's wishes, and for the sake of brevity the quotients are omitted, similarly also the common denominator has been set apart only once.

If these fractions

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{7},\ \frac{7}{8},\ \frac{8}{9},\ \frac{9}{10}$$

must be brought to have the same denominators, thus initially the smallest common divisible number can readily be sought of all the denominators and from that 2520 are found; but then the operation adopts the following form :

$\frac{1}{2}$	$\frac{1260}{2520}$	1260
$\frac{2}{3}$	$\frac{1680}{2520}$	840
$\frac{3}{4}$	$\frac{1890}{2520}$	630
$\frac{4}{5}$	$\frac{2016}{2520}$	504
$\frac{5}{6}$	$\frac{2100}{2520}$	420
$\frac{6}{7}$	$\frac{2160}{2520}$	360
$\frac{7}{8}$	$\frac{2205}{2520}$	315
$\frac{8}{9}$	$\frac{2240}{2520}$	280
$\frac{9}{10}$	$\frac{2268}{2520}$	252

An example from fractions , thus composed from greater numbers, can give these $\frac{13}{63}$, $\frac{22}{105}$, $\frac{103}{140}$, which, since the smallest common divisible number of the denominator is 1260, is brought to the same denominators as follows:

$$\begin{array}{c|c r|}
\frac{13}{63} & \frac{260}{1260} & 20 \\
\frac{22}{105} & \frac{264}{1260} & 12 \\
\frac{103}{140} & \frac{927}{1260} & 9
\end{array}$$

From which examples it is sufficient to see how this operation brings fractions to the same denominator.

7. *If either single fractions as well as whole numbers taken together with fractions are either to be added together or subtracted, thus before all things the fractions must be brought to equal denominators or to be changed into others, thus to have the same denominator. Hereafter the addition or subtraction can be performed, as already has been taught above with fractions, of which the denominators are equal. Namely for the addition the numerators of the fractions found are to be added, and under the sum as a numerator, the common denominator to be written, which fraction indicates the sum of the fractions. Now if this fraction is greater than a whole number, thus the whole numbers are to be taken from this, and thus the whole numbers taken to be added there, to be attached to the same sum. But in subtraction the numerator of the fraction below would be taken from the numerator of the fraction above, provided the same is smaller; but should the other numerator be greater, thus would the above fraction be increased by a whole number and then the subtraction performed.*

In nos. 2 and 3 of the above proposition it has been shown well enough already, how both additions as well as subtractions with fractions may be performed, which have the same denominator. But here we come to these very operations, if the given fractions have unequal denominators. Hereby we now come to put in place, what is advanced in the previous proposition, how fractions of unequal denominators should be changed into others, which have equal denominators. Thus if we take this transformation to help, both the addition as well as the subtraction of fractions, of which the denominators are unequal, are reduced to the addition and subtraction of fractions thus having equal denominators. Therefore, if either single fractions or whole numbers taken together with fractions are to be added or subtracted from each other, thus before all else the fractions must be changed into others, of which the denominators are equal, and that put in the above place, since then both addition as well as subtraction can be performed, as explained above. Whereby there is nothing more to remember, as both these operations to be further clarified by an example.

Example of addition in fractions.

I. The question is, how much does $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{6}$ added together amount to.

Here the denominator 6 is the smallest common divisible number : thus we bring these fractions to equal denominators and add the same as follows:

$$\begin{array}{r|r|}
\frac{1}{2} & \frac{3}{6} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\
\hline
\text{Sum} & \frac{4}{6}
\end{array}, \text{ that is } \frac{2}{3}.$$

Thus $\frac{2}{3}$ is the sum sought of $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{6}$.

II. We want to know the sum of these fractions $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{15}$.

The smallest common divisible number of 5, 6 and 15 is 30, and thus the whole operation will come to be put in place as follows :

$$\begin{array}{r|r|}
\frac{3}{5} & \frac{18}{30} \\
\frac{1}{6} & \frac{5}{30} \\
\frac{7}{15} & \frac{14}{30} \\
\hline
\text{Sum} & \frac{37}{30}
\end{array}, \text{ that is } 1\frac{7}{30}.$$

While the new fractions all have a single denominator, thus we can for the sake of brevity set down all the numerators and the common denominator only to be noted apart ; as to be seen in the following example.

III. How large is the sum of these fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{9}$?

The common denominator of these fractions becomes 2520, and the following operation to be as follows:

$$\begin{array}{r|l}
\hline
 & \underbrace{2520} \\
\frac{1}{2} & 1260 \\
\frac{2}{3} & 1680 \\
\frac{1}{4} & 630 \\
\frac{2}{5} & 1008 \\
\frac{1}{6} & 420 \\
\frac{2}{7} & 720 \\
\frac{1}{8} & 315 \\
\frac{2}{9} & 560 \\
\hline
\text{Sum} & \frac{6593}{2520}
\end{array}, \text{ that is } 2\frac{1553}{2520}.$$

IV. Four people put some money down together: the first $15\frac{1}{2}$ rubles, the second $15\frac{3}{4}$ rubles, the third $10\frac{2}{5}$ rubles and the fourth $8\frac{7}{10}$ rubles. Now the question is, how large is the whole sum to be.

In order to find this sum, thus we have to add these numbers together $15\frac{1}{2}$, $15\frac{3}{4}$, $10\frac{2}{5}$, $8\frac{7}{10}$, which operation will be as follows:

	$\underbrace{20}$
$15\frac{1}{2}$	10
$15\frac{3}{4}$	15
$10\frac{2}{5}$	8
$8\frac{7}{10}$	14
Sum 45	$\frac{47}{20}$, that is $47\frac{7}{20}$ rubles.

Then the sum of the fractions is $\frac{47}{20}$, that is 2 and $\frac{7}{20}$;if now the two whole rubles to be added to the 45 rubles, thus the sum sought is $47\frac{7}{20}$ rubles.

V. If the following numbers $217\frac{32}{76}$, $340\frac{28}{45}$, and $425\frac{40}{63}$ should be added together, thus the sum of the following form is found:

	$\underbrace{1575}$
$217\frac{32}{76}$	672
$340\frac{28}{45}$	980
$425\frac{40}{63}$	1000
Sum 982	$\frac{2652}{1575}$, that is $983\frac{1077}{1575}$.

That is further $983\frac{359}{525}$, while the fraction is made smaller by a factor of 3.

Examples of subtraction in fractional numbers

I. We would like to know what remains, if $\frac{1}{3}$ is taken from $\frac{3}{5}$. To find this remainder we must bring the given fractions to equal denominators, and thereafter the subtraction is able to be performed, as follows:

$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{15}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{15}$
	Rem. $\frac{4}{15}$.

II. If we want to find the difference between these fractions $\frac{12}{17}$ and $\frac{29}{41}$, thus we must take the smaller fraction from the larger ; but while this still cannot be known, which fraction is greater than the other, thus we must find this out first. This is now found at the same time, if we bring these fractions to the same denominators ; as then as of these a numerator will be greater than the others, thus also the same fraction is greater. Thus we have only to bring the given fractions to equal denominators and to subtract the smaller from the larger, as follows :

$\frac{12}{17}$	$\frac{492}{697}$
$\frac{29}{41}$	$\frac{493}{697}$
	Rem. $\frac{1}{697}$.

Thus $\frac{29}{41}$ is greater than $\frac{12}{17}$ and the difference is $\frac{1}{697}$.

III. We require to know from these two fractions $\frac{13}{21}$ and $\frac{55}{89}$, which shall be the greater, and also on that account how much greater the larger to be from the smaller. Thus we bring these fractions to equal denominators, since then it will be shown, which is greater than the other, as well as, how great the difference is.

$\frac{13}{21}$	$\frac{1157}{1869}$
$\frac{55}{89}$	$\frac{1155}{1869}$
	Rest $\frac{2}{1869}$.

Consequently $\frac{13}{21}$ is greater than $\frac{55}{89}$ and the difference is $\frac{2}{1869}$.

IV. From $3\frac{7}{12}$ there must be taken $1\frac{4}{9}$.

We bring the fractions to an equal denominators, and perform the subtraction as shown above.

$$\begin{array}{r|r} 3\frac{7}{12} & \frac{21}{36} \\ 1\frac{4}{9} & \frac{16}{36} \\ \hline \text{Rem. } 2 & \frac{5}{36}. \end{array}$$

V. If $23\frac{13}{30}$ shall be taken from $49\frac{8}{105}$, thus will the form of the remainder be found:

$$\begin{array}{r|r} 49\frac{8}{105} & \frac{16}{210} \\ 23\frac{13}{30} & \frac{91}{210} \\ \hline \text{Rem. } 25 & \frac{135}{210}, \end{array}$$

that is $25\frac{9}{14}$.

CAPITEL 7

VON DER ADDITION UND SUBTRACTION DER GEBROCHENEN ZAHLEN

1. *Wann zu einer ganzen Zahl ein Bruch addirt werden soll, so hat man nur den Bruch hinter die ganze Zahl zu schreiben. Gleickergestalt, wann zu einer ganzen Zahl eine ganze Zahl samt einem Brüche addirt werden soll, so addirt man die ganzen Zahlen zusammen, und an die Summe hängt man noch den Bruch an. Hingegen wann man von einer ganzen Zahl samt einem Brüche eine andere, kleinere, ganze Zahl abziehen soll, so wird die kleinere Zahl von der grösseren ganzen Zahl subtrahirt und an den Rest noch der Bruch gehängt.*

Was hier von den beschriebenen Fällen der Addition und Subtraction gemeldet worden, beruhet ganz und gar allein auf der angenommenen Art, eine aus ganzen und gebrochenen Zahlen bestehende grösse auszudrücken, und erfordert also keinen ferneren Beweisthum. Dann da zum Exempel $4\frac{3}{7}$ so viel bedeutet als 4 ganze und über das noch drei siebente Theile, so ist für sich klar, dass, wann zu 4 ganzen drei siebentel addirt werden sollen, die Somme also $4\frac{3}{7}$ ausgedrücket werden müsse. Wann demnach ein Bruch zu einer ganzen Zahl addirt werden soll, so bekommt man die Summe, wann man den Bruch zu der ganzen Zahl schreibt. Als wann dieser Bruch $\frac{24}{35}$ zu dieser Zahl 107 addirt werden soll, so wird die Summe sein $107\frac{24}{35}$. Wann aber zu einer ganzen Zahl eine ganze Zahl samt einem Brüche addirt werden soll, so darf man nur erstlich die ganzen Zahlen addiren, und zu der herausgekommenen Zahl noch den Bruch, wie im vorigen Falle. Als wann zu 17 addirt werden soll $9\frac{5}{12}$, so wird die Summe sein $26\frac{5}{12}$. Wann nun hinwiederum von $26\frac{5}{12}$ sollte 17 subtrahirt werden, so sieht man aus dem vorigen Exempel, dass der Rest $9\frac{5}{12}$ sein müsse; dieser Rest aber wird gefunden, wann man 17 von 26 subtrahirt, und zum übergebliebenen, nämlich 9, den Bruch $\frac{5}{12}$ hinzusetzt. Woraus also erhellet, wie von einer ganzen Zahl nebst einem Bruch eine andere, kleinere ganze Zahl abgezogen werden müsse. Diese Fälle aber von der Addition und Subtraction sind für sich so leicht, dass nicht nöthig gewesen wäre, davon Meldung zu thun. Unterdessen aber kann man daraus sehen, dass die ganzen Zahlen, wann dieselben mit Brüchen verknüpfet sind, weder die Addition noch die Subtraction schwerer machen; und zeigen also eben diese Falle, dass, wer die Addition und Subtraction mit blossen Brüchen gelernet, derselbe zugleich mit ganzen und gebrochenen Zahlen operiren könne. Als wann einer schon begriffen, dass $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ zusammen $\frac{5}{6}$ ausmachen, derselbe wird auch $5\frac{1}{2}$

und $6\frac{1}{3}$ zusammen addiren, und $11\frac{5}{6}$ herausbringen können. Hieraus sieht man also, dass die grösste Schwierigkeit bei der Addition und Subtraction mit gebrochenen Zahlen nur auf den Brüchen allein beruhe, und wann ganze Zahlen mit den Brüchen verknüpfet sind, dadurch die Operation nicht schwerer gemacht werde. Ferner, obgleich, wie im vorigen Capitel gelehret worden, ganze Zahlen durch Brüche können ausgedrücket werden, so ist doch diese Verwandlung allhier nicht nöthig, sondern die Operation kann ohne dieselbe leichter bewerkstelliget werden. Wie demnach mit blossen Brüchen zu verfahren, werden wir in folgenden Satzen erklaren.

2. *Wann zwei oder mehr Brücke, welche zusammen addirt werden sollen, einerlei Nenner haben, so addirt man die Zähler zusammen, und unter die Summe als einen Zähler setzt man den gemeinen Nenner; da dann dieser Bruch die wahre Summe der vorgelegten Brüche sein wird. Bei diesem gefundenen Bruche können ferner die oben gegebenen Regeln von Reducirung der Brücke in die einfaltigste Form, angebracht werden.*

Wann die gegebenen Brüche gleiche Nenner haben, so deuten sie alle einerlei Theile eines ganzen an, nämlich ein jeder Bruch enthalt so viel dergleichen Theile, als sein Zähler anzeigt. Derowegen diese Brüche zusammen addiren ist nichts anders als finden, wieviel dergleichen Theile alle insgesammt enthalten. Wann man also alle Zähler zusammen addirt, so weiset die Summe, wieviel dergleichen Theile alle Brüche insgesammt ausmachen. Da nun dieses solche Theile sind, als der gemeine Nenner der gegebenen Brüche anzeigt, so ist die Summe derselben Brüche ein Bruch, dessen Nenner der gemeine Nenner, der Zähler aber die Summe der Zähler ist. Als wann zum Exempel diese Brüche $\frac{2}{25}$, $\frac{4}{25}$ und $\frac{6}{25}$ zusammen addirt werden sollten, so sieht man, dass ein jeder Bruch einerlei, nämlich fünfundzwanzigste Theile eines ganzen andeute, dergleichen der erste 2, der andere 4 und der dritte 6 enthalt. Alle drei zusammen also machen 12 fünfundzwanzigste Theile eines ganzen aus, welche also 12 geschrieben werden, und folglich ist dieser Bruch $\frac{12}{25}$, dessen Nenner dem gemeinen Nenner der gegebenen Brüche, der Zähler aber der Summe der Zähler gleich ist, die gesuchte Summe der gegebenen Brüche $\frac{2}{25}$, $\frac{4}{25}$ und $\frac{6}{25}$. Hieraus erhellet nun, dass die Summe zweier oder mehr gegebenen Brüche, welche gleiche Nenner haben, ein Bruch sei, dessen Nenner der vorige gemeine Nenner, der Zähler aber die Summe der Zähler der gegebenen Brüche ist. Um also zwei oder mehr solche Brüche, welche gleiche Nenner haben, zusammen zu addiren, so addirt man bloss die Zähler und unter die Summe setzt man den gemeinen Nenner, da dann dieser Bruch die wahre Summe der gegebenen Brüche sein wird. Will man diese Summe auf die leichteste und bequemste Art ausgedrücket haben, so sieht man, ob der gefundene Bruch ganze in sich enthalte, und in solchem Falle zieht man die ganzen heraus, und deutet dieselben durch eine ganze Zahl an. Ferner, wann der gefundene

Bruch durch kleinere Zahlen ausgedrücket werden kann, so pflegt man auch denselben in die kleinsten möglichen Zahlen zu bringen.

Wann zum Exempel diese Brüche $\frac{7}{30}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{13}{30}$ addirt werden sollten, so würde die ganze Operation also zu stehen kommen:

$$\begin{array}{c} \frac{7}{30} \\ \frac{11}{30} \\ \frac{13}{30} \\ \hline \text{Summa } \frac{31}{30}, \text{das ist } 1\frac{1}{30}. \end{array}$$

Man findet nämlich $\frac{31}{30}$, welcher Bruch, weilen der Zähler grösser ist als der Nenner, mehr als ein ganzes ausmacht, derowegen dividirt man 31 durch 30, und findet für den Quotum 1 und den Rest auch 1, woraus man sieht, dass $\frac{31}{30}$ so viel sei als $1\frac{1}{30}$

Ferner folgende Bruche $\frac{5}{48}$, $\frac{7}{48}$, $\frac{11}{48}$, und $\frac{20}{48}$ machen in einer Summe zusammen, wie aus folgender Operation zu sehen:

$$\begin{array}{c} \frac{5}{48} \\ \frac{7}{48} \\ \frac{11}{48} \\ \frac{17}{48} \\ \frac{20}{48} \\ \hline \text{Summa } \frac{60}{48}, \text{das ist } 1\frac{12}{48} \text{ oder } 1\frac{1}{4}, \end{array}$$

weilen des Bruchs $\frac{12}{48}$ Zähler und Nenner durch 12 getheilet werden können.

Wieviel diese Brüche $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ in einer Summe ausmachen, ist aus folgender Operation zu sehen:

$$\begin{array}{c} \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{5}{7} \\ \hline \text{Summa } \frac{14}{7}, \text{ das ist } 2. \end{array}$$

Wann dergleichen Brüche viel zu addiren vorkommen, so ist der Kürze halben nicht nöthig, bei jedem Bruche in der Operation den Nenner hinzu zu setzen, sondern ist genug, nur die Zähler hinzu schreiben, und den gemeinen Nenner sich auf der Seite anzumerken, also würden diese Exempel folgendergestalt auf das kürzeste gerechnet werden:

	5 (48	
	7	2 (7
7 (30	11	3
11	17	4
13	20	5
Summa : $\frac{30}{31}$, das ist $1\frac{1}{30}$	$\frac{60}{48}$, das ist $1\frac{1}{4}$	$\frac{14}{7}$, das ist 2.

Also wird man von desen Brüchen $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{12}$ und $\frac{9}{12}$ diese Summe $\frac{16}{12}$, das ist $1\frac{1}{3}$ finden. Bei diesem Exempel sieht man, dass die vorgegebenen Brüche nicht in den kleinesten Formen sind gegeben worden, sondern auf diese Art hätten können gegeben werden $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$. Ob dieselben aber gleich auf diese Art kürzer ausgedrücket werden, so dienet doch die vorgegebene Form zur Addition weit mehr, wegen der gleichen Nenner, welche dazu erfordert werden. Also können diese Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{4}$ auf diese Art nicht addirt werden. Wann man aber $\frac{8}{12}$ für $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{12}$ für $\frac{1}{4}$ setzt, so ist die Summe, nämlich $\frac{11}{12}$ leicht zu finden. Hieraus ist nun leicht zu verstehen, dass, wann Brüche von ungleichen Nennern zusammen addirt werden sollen, dieselben in andere Formen verwandelt werden müssen, in welchen die Nenner gleich sind; wozu hernach die gehörige Anleitung gegeben werden soll.

Zu einem Exempel aber von ganzen und gebrochenen Zahlen zu addiren seien diese Zahlen $5\frac{4}{15}$, $3\frac{7}{15}$, $9\frac{8}{15}$, und $\frac{1}{15}$, vorgelegt, davon die Summe gefunden werden soll; welches folgendergestalt geschicht:

$$\begin{array}{r} 5\frac{4}{15} \\ 3\frac{7}{15} \\ 9\frac{8}{15} \\ \frac{1}{15} \\ \hline \text{Summa } 17\frac{20}{15}, \end{array} \text{ das ist } 18\frac{5}{15} \text{ oder } 18\frac{1}{3}.$$

Nämlich $\frac{20}{15}$ ist so viel als $1\frac{5}{15}$, welches zu 17 addirt macht $18\frac{1}{3}$, und $\frac{5}{15}$ wird auf $\frac{1}{3}$ reducirt.

3. *Wann von zweien Brüchen, welche gleiche Nenner haben, der kleinere von dem grösseren subtrahirt werden soll, so zieht man den kleineren Zähler von dem grösseren ab und setzt unter den Rest den gemeinen Nenner, welcher Bruch sodann den gesuchten Rest ausmacht. Soll aber von einer ganzen Zahl nebst einem Brüche eine andere ganze Zahl nebst einem Bruche, dessen Nenner des vorigen Bruchs Nenner gleich ist, subtrahirt werden, so wird der Bruch der kleineren Zahl von dem Bürche der grösseren, und die ganze kleinere Zahl von der ganzen grösseren subtrahirt, wann der Bruch der grössern Zahl grösser ist als der Bruch der kleineren Zahl. Ist aber der Bruch der grösseren Zahl kleiner als der Bruch der kleineren Zahl, so wird ein ganzes von der ganzen grösseren Zahl genommen und zu dem Brüche*

geschlagen, damit die Subtraction geschehen könne, hierauf aber entweder die ganze Zahl der grösseren um eins kleiner oder die ganze Zahl der kleineren um eins grösser angesehen.

Haben die zwei Brüche, davon der kleinere vom grösseren abgezogen werden soll, gleiche Nenner, so enthalten sie gleiche Theile eines ganzen, nämlich ein jeder so viel solche Theile, als sein Zähler anzeigt. Wann man nun den kleineren Bruch vom grösseren subtrahiren will, so zieht man die kleinere Anzahl solcher Theile von der grösseren ab, das ist, man subtrahirt den kleineren Zähler vom grösseren, und unter den Rest als den Zähler schreibt man den gemeinen Nenner. Als wann $\frac{4}{15}$ von $\frac{7}{15}$ soll abgezogen werden, so bleiben $\frac{3}{15}$, das ist $\frac{1}{5}$, über, woraus die Subtraction solcher Brüche leicht zu begreifen ist; weswegen folgende Subtractionsexempel zu fernerer Erläuterung genug sein werden:

$\frac{4}{7}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{17}{30}$
$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{12}{30}$
Rest: $\frac{2}{7}$	$\frac{2}{12}$, dass ist $\frac{1}{6}$	$\frac{5}{30}$, dass ist $\frac{1}{6}$.

Hiebei ist nun zu merken, welches aus der Natur der Brüche von selbst folgt, dass von zweien Brüchen, welche gleiche Nenner haben, derjenige der grössere ist, welcher den grösseren Zähler hat; sind also die Zähler einander gleich, so sind auch die Brüche einander gleich und folglich der Rest nichts; als $\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ bleibt 0. Lasst uns nun zwei aus ganzen und Brüchen zusammengesetzte Zahlen betrachten, so ist diejenige Zahl die grössere, in welcher die ganze Zahl grösser ist, wann nämlich die Bruche kleiner sind als ein ganzes: also ist $4\frac{1}{3}$ mehr als $3\frac{2}{3}$, obgleich der Bruch der kleineren grösser ist als der Bruch der grösseren. Haben nun bei zweien solchen zusammengesetzten Zahlen die Brüche gleiche Nenner, und ist zugleich der Bruch der grösseren Zahl auch grösser als der Bruch der kleineren, so hat die Subtraction keine Schwierigkeit, indem die ganzen von den ganzen und die Brüche von den Brüchen abgezogen werden können, als $3\frac{2}{5}$ von $7\frac{4}{5}$ bleibt $4\frac{2}{5}$ über; die Operation kann aber mit mehrerem aus folgenden Exempeln ersehen werden:

$10\frac{16}{21}$	$127\frac{19}{30}$
$5\frac{13}{21}$	$69\frac{11}{30}$
Rest: $5\frac{3}{21}$, das ist $5\frac{1}{7}$	$58\frac{8}{30}$, dass ist $58\frac{4}{15}$.

Gleichergestalt, wann $6\frac{7}{12}$ von $9\frac{7}{12}$ subtrahirt werden soll, so bleibt nur 3 über, weilen die Brüche einander gleich sind und von einander aufgehen.

Wenn aber der Bruch der grösseren Zahl kleiner ist als der Bruch der kleineren, so muss, wie in der Subtraction der ganzen Zahlen geschehen, von der ganzen grösseren Zahl eine Unitat genommen und zum Brüche geschlagen werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$16\frac{3}{5}$	$347\frac{17}{36}$
$11\frac{4}{5}$	$209\frac{25}{36}$
Rest: $4\frac{4}{5}$	$137\frac{28}{36}$, dass ist $137\frac{7}{9}$.

Hier sollen im ersteren Exempel $11\frac{4}{5}$ von $16\frac{3}{5}$ subtrahirt werden; man fangt also beiden Brüchen als der kleinsten Sorte an, und weil $\frac{4}{5}$ von $\frac{3}{5}$ nicht kann subtrahirt werden, so nimmt man von den 16 ganzen eins, welches $\frac{5}{5}$ betragt, und thut dies zum Brüche $\frac{3}{5}$, so hat man $\frac{8}{5}$; hievon subtrahirt man nun $\frac{4}{5}$, so bleiben im Rest $\frac{4}{5}$; hierauf muss man 11 nicht von 16, sondern nur von 15 subtrahiren, weilen von 16 schon eine Unität ist weggenommen worden. Oder, welches gleichviel ist, anstatt dass man 16 um eins vermindert, so kann man 11 um eins vermehren und sagen: 12 von 16 bleiben 4; ist also in diesem Exempel der gesuchte Rest $4\frac{4}{5}$. Im anderen Exempel, da $209\frac{25}{36}$ von $347\frac{17}{36}$ subtrahirt werden soll, nimmt man gleichfalls von 347 ein ganzes oder $\frac{36}{36}$ und thut dasselbe zu $\frac{17}{36}$, da hat man $\frac{53}{36}$; davon $\frac{25}{36}$ abgezogen bleibt $\frac{28}{36}$, das ist $\frac{7}{9}$, weil oben und unten durch 4 dividirt werden kann. Hierauf muss man 209 von 346 oder, welches gleichviel, 210 von 347 abziehen, da dann 137 zurückbleibt, so dass also der gesuchte Rest $137\frac{7}{9}$ sein wird.

In diesem und dem vorigen Satz ist also zur Gnüge angezeiget worden, wie sowohl blosse Brüche als aus ganzen und Brüchen zusammengesetzte Zahlen, wann die Brüche gleiche Nenner haben, unter sich addirt oder von einander subtrahirt werden sollen. Derowegen ist noch übrig zu zeigen, wie mit Brüchen, so ungleiche Nenner haben, verfahren werden soll. Hiebei aber ist vor allen Dingen zu merken, dass solche Brüche anderst nicht tractirt werden können, als dass sie in andere, so gleiche Nenner haben, verwandelt werden; wann also dieses geschehen, so hat weder die Addition noch Subtraction weitere Schwierigkeit. Deswegen läuft die ganze Sache dahinaus, dass wir weisen, wie zwei oder mehr Brüche, welche ungleiche Nenner haben, in andere verwandelt werden sollen, welche gleiche Nenner haben und doch den vorigen dem Werthe nach gleich sind; dazu aber wird folgende Vorbereitung erfordert.

4. *Eine gemeine theilbare Zahl* (*communis dividuus*) *von zweien oder mehr gegebenen Zahlen ist eine solche Zahl, welche sich durch eine jegliche der gegebenen Zahlen ohne Rest theilen lasst. Wann nun zwei oder mehr Zahlen gegeben sind, so wird eine solche gemeine theilbare Zahl gefunden, wann man die gegebenen Zahlen mit einander multiplicirt. Mehr dergleichen gemeine theilbare Zahlen werden gefunden, wann man die erst gefundene mit einer jeglichen beliebigen Zahl multiplicirt; woraus folget, dass von zwei oder mehr gegebenen Zahlen unendlich viel gemeine theilbare Zahlen gefunden werden konnen.*

Gesetzt, die gegebenen Zahlen wären 2, 3, 5; so sind davon alle diejenigen Zahlen gemeine theilbare Zahlen, welche sich durch 2, durch 3 und durch 5 theilen lassen ohne Rest; eine solche gemeine theilbare Zahl ist also 30, dann 30 lasst sich durch 2 und durch 3 und durch 5 theilen. Ferner sind auch 60, 90, 120, 150 und so fort, gemeine theilbare Zahlen von 2, 3 und 5. Die gegebene Regel, eine solche gemeine theilbare Zahl zu finden, ist leicht zu begreifen; dann wann man die gegebenen Zahlen mit einander multiplicirt, so lasst sich wiederum das Produkt durch eine jegliche der gegebenen Zahlen theilen und ist folglich davon eine gemeine theilbare Zahl. Ferner ist auch klar, dass, wann sich eine Zahl durch die gegebenen Zahlen ·theilen lasst, auch das doppelte, dreifache und so fort, dieselbe theilbare Zahl mit einer jeglichen beliebigen Zahl multiplicirt, sich dadurch theilen lasse; dann eine jegliche Zahl, welche sich durch die gemeine theilbare Zahl theilen lasst, lasst sich auch durch die gegebenen Zahlen theilen. Als beiden gegebenen Zahlen 2, 3, 5, multiplicirt man nach der Regel erstlich 2 mit 3 und das Product *6* noch mit 5, so ist 30 das Product von 2, 3, 5 und folglich eine gemeine theilbare Zahl von 2, 3 und 5. Ferner sind auch alle Zahlen, welche sich durch 30 theilen lassen, gemeine theilbare Zahlen von 2, 3 und 5; diese werden gefunden, wann man 30 mit einer beliebigen Zahl multiplicirt; als da sind 60, 90, 120, 150 und so weiter. Um aber die Operation nach der gegebenen Regel etwas leichter zu machen, so sucht man erstlich, wann mehr als 2 Zahlen gegeben sind, eine gemeine theilbare Zahl nur von zweien· Zahlen; hernach nimmt man zu der gefundenen Zahl die dritte der gegebenen Zahlen und sucht davon wieder eine gemeine theilbare Zahl; dazu nimmt man ferner die vierte gegebene Zahl und sucht davon wieder eine gemeine theilbare Zahl; und also fàhrt man fort, bis man alle gegebenen Zahlen in Betrachtung gezogen hat. Als wann von diesen Zahlen 2, 5, 7, 9 und 11 eine gemeine theilbare Zahl sollte gefunden werden, so würde die Operation wie folget zu stehen kommen:

$$\begin{array}{r}
5\\
\underline{2}\\
10\\
\underline{7}\\
70\\
\underline{9}\\
630\\
\underline{11\;}\\
63\;\\
\underline{63\;\;\;}\\
6930
\end{array}$$

nämlich: man sucht erstlich von 2 und 5 eine gemeine theilbare Zahl, welches geschieht, wann man 5 mit 2 multiplicirt, da dann 10 herauskommt. Ferner sucht man von 10 und 7 eine gemeine theilbare Zahl, indem man 10 mit 7 multiplicirt; so ist 70 schon eine gemeine theilbare Zahl von 2, 5 und 7. Hernach multiplicirt man die gefundene Zahl 70 mit 9, so ist das Product 630 eine gemeine theilbare Zahl von 70 und 9 und folglich auch von 2, 5, 7 und 9. Endlich multiplicirt man 630 mit 11, so ist das Product 6930 eine gemeine theilbare Zahl von 2, 5, 7, 9 und 11, dergleichen verlanget worden.

Hiebei ist aber zu merken, dass man öfters eine kleinere theilbare Zahl angeben könne, als auf diese Art durch die Multiplication gefunden wird; in solchen Fällen ist nun dienlich, dass man die kleineste theilbare Zahl zu finden suche, als wodurch die Rechnung um ein merkliches kann abgekarzt werden.

Ob wir nun gleich im folgenden dazu die gehörige Regel geben werden, so wollen wir doch hier ein Exempel von einem solchen Falle vorbringen, damit man sich davon zum voraus einen Begriff machen könne. Wann also von diesen Zahlen 2, 4, 6, 9 eine gemeine theilbare Zahl gesucht werden sollte, so nehme man erstlich 2 mit 4; davon sieht man, dass 4 eine gemeine theilbare Zahl ist, welche kleiner ist als die, so durch die gegebene Regel gefunden wird, nämlich 8. Man nehme also nicht 8, sondern 4, und dazu 6, und suche von 4 und 6 eine gemeine theilbare Zahl, welche nach der Regel 24 sein würde; man sieht aber, dass sich auch 12 durch 4 und 6 theilen lasse, welche Zahl man also der anderen billig vorzieht. Endlich betrachtet man 12 und 9, und sucht davon die kleinste theilbare Zahl, welche 36 ist, da man nach der Regel 108 gefunden hatte. Also ist 36 eine gemeine theilbare Zahl von 2, 4, 6, 9, und das eine solche, welche weit kleiner ist als die, so nach der Regel wäre herausgebracht worden, nämlich 432. Wie derohalben in allen dergleichen Fällen die kleinste gemeine theilbare Zahl gefunden werden soll, dazu dienet folgen de Regel.

5. *Die kleinste gemeine theilbare Zahl* (*Minimus communis dividuus*) *von zweien Zahlen wird gefunden, wann man erstlich den grössten gemeinen Theiler davon sucht, und hernach das Product der beiden Zahlen dadurch dividirt; oder welches gleich viel: man dividirt die eine Zahl durch den gefundenen grössten gemeinen Theiler, und mit dem Quoto multiplicirt man die andere Zahl, da dann das Product die kleinste germeine theilbare Zahl sein wird.*

Sind aber mehr als zwei Zahlen vorgegeben, so sucht man erstlich von zweien davon die kleinste gemeine theilbare Zahl; hernach nimmt man diese und die dritte der gegebenen Zahlen zusammen und sucht davon wiederum die kleinste [gemeine] theilbare Zahl; ferner wiederum von dieser und der vierten gegebenen Zahl, und fahrt also fort, bis man alle gegebenen Zahlen durchgegangen: da dann die letzt gefundene Zahl die kleinste gemeine theilbare Zahl aller gegebenen sein wird.

Wann die zwei gegebenen Zahlen unter sich untheilbar sind, und also ihr grösster gemeiner Theiler 1 ist, so kann keine kleinere Zahl als das Product davon angegeben werden, welche sich durch beide Zahlen zugleich theilen liesse. Haben aber die beiden gegebenen Zahlen noch ausser 1 einen gemeinen Theiler, so lasst sich noch allzeit, wann man das Product derselben durch diesen gemeinen Theiler dividirt, der Quotus durch beide Zahlen theilen, und ist folglich auch eine gemeine theilbare Zahl, und das kleiner als das Product selbst. Wann man also das Product durch den grössten gemeinen Theiler dividirt, so muss der Quotus die kleinste gemeine theilbare Zahl sein von den z wei gegebenen Zahlen, so möglich ist. Wie aber der grösste gemeine Theiler zweier Zahlen gefunden werden soll, ist schon oben gelehret worden; und vermittelst desselben kann man also allezeit zweier gegebenen Zahlen kleinste gemeine theilbare Zahl ausfinden. Es ist aber gleichviel, ob man das Product der zwei gegebenen Zahlen durch den grössten gemeinen Theiler dividirt, oder ob man vor der Multiplication die eine Zahl durch den grössten gemeinen Theiler dividirt, und hernach durch den gefundenen Quotum die andere Zahl multiplicirt.

Um diese Regel aber durch Exempel deutlicher zu machen, so seien diese Zahlen 9 und 15 vorgegeben, davon die kleinste gemeine theilbare Zahl gefunden werden soll. Dieser Zahlen grösster gemeiner Theiler ist 3; und wann man also das Product, nämlich 135, durch 3 dividirt, so kommt 45 heraus, welches die kleinste gemeine theilbare Zahl ist von 9 und 15. Eben diese Zahl wird gefunden, wann man die eine Zahl, als 9, durch 3 dividirt und mit dem Quoto 3 die andere Zahl, 15, multiplicirt; oder auch, wann man die andere Zahl durch 3 dividirt und mit dem Quoto 5 die andere Zahl, 9, multiplicirt. Diese beiden Arten pflegen gemeiniglich durch die Multiplication durch Kreuze vorgestellt zu werden, also:

$$\begin{array}{lcc} & 9 & 15 \\ & \times & \\ 3) & 3 & 5 \\ \cline{2-3} & 45 & 45 \end{array}$$

Nämlich man dividirt eine jede Zahl, 9 und 15, durch den grössten gemeinen Theiler 3 und schreibt die Quotos 3 und 5, darunter. Hernach multiplicirt man durch das Kreuz eine jede Zahl mit dem Quoto der anderen, da dann bei derseits 45 herauskommt, welches die kleinste gemeine theilbare Zahl der beiden gegebenen ist. Ob aber gleich von diesen beiden Operationen eine allein genug wäre, so ist gleichwohl diese doppelte Operation nicht ganzlich als unnütz zu verwerfen: dann da durch beide Multiplicationen ein Product herauskommen muss, so dienet diese Operation zugleich als eine Probe, dass man sich im Rechnen nicht geirret; indem, wann nicht einerlei Zahl gefunden werden sollte, dasselbe ein gewisses Zeichen eines Fehlers sein Würde. Wann also von 30 und 54 die kleinste gemeine theilbare Zahl gesucht werden sollte, so ist vor allen Dingen nöthig, den grössten gemeinen Theiler dieser Zahlen zu suchen, welcher 6 sein wird; hierauf macht man folgende Operation:

$$\begin{array}{rcc} & 30 & 54 \\ & \times & \\ 6) & 5 & 9 \\ \hline & 270 & 270 \end{array}$$

Woraus also er hellet, dass 270 die gesuchte kleinste gemeine theilbare Zahl sei. Wann ferner die kleinste gemeine theilbare Zahl von 6 und 24 gesucht werden sollte, so sieht man leicht, dass dieselbe 24 selbst sein werde, weilen sich 24 durch 6 und 24 theilen lasst. Eben diese Zahl wird aber auch durch die Regel gefunden; dann da 6 der grösste gemeine Theiler ist, so kommt die Operation folgendermassen heraus:

$$\begin{array}{rcc} & 6 & 24 \\ & \times & \\ 6) & 1 & 4 \\ \hline & 24 & 24 \end{array}$$

Hieraus sieht man also, dass, wann sich von den zweien gegebenen Zahlen die grössere durch die kleinere theilen lasst, sodann die grössere Zahl selbst die kleinste gemeine theilbare Zahl sei; in welchen Fällen man also nicht einmal nöthig hat, die vorgeschriebenen Operationen anzustellen.

Wer nun von zweien gegebenen Zahlen die kleinste gemeine theilbare Zahl finden kann, derselbe ist zugleich im stande, von so viel Zahlen, als vorgegeben sein möchten, die kleinste gemeine theilbare Zahl zu finden. Dann von den vorgegebenen Zahlen nimmt man zwei nach Belieben, und sucht davon die kleinste gemeine theilbare Zahl, welche in die Stelle derselben zweien Zahlen gesetzt werden kann, sodass auf solche Weise die Anzahl der gegebenen Zahlen um eine kleiner wird. Ferner nimmt man wiederum nach Belieben zwei Zahlen und sucht davon die kleinste gemeine theilbare Zahl und setzt dieselbe an die Stelle derselben zweien Zahlen, sodass die Anzahl der Zahlen wiederum um eine vermindert wird. Solchergestalt fahrt man also fort, bis man alle gegebenen Zahlen auf zwei gebracht hat, deren kleinste gemeine theilbare Zahl zugleich die kleinste gemeine theilbare Zahl von allen vorgegebenen Zahlen ist. Diese Regel ist von der im Satze gegebenen nur darinn unterschieden, dass man nach jener immer die letztgefundene kleinste [gemeine] theilbare Zahl mit einer neuen Zahl zusammen nimmt und davon die kleinste gemeine theilbare Zahl sucht; nach dieser Regel aber man nach Belieben zwei Zahlen nehmen kann, welche noch nicht in Betrachtung gezogen worden sind. Diese Freiheit der letzteren Regel ist aber nicht ohne Nutzen; dann da kann man immer solche zwei

Zahlen auslesen, davon man am leichtesten die kleinste gemeine theilbare Zahl ausfinden kann; dergleichen sind solche zwei Zahlen, davon die grössere sich durch die kleinere theilen lässt , dann da ist die grössere Zahl selbst die kleinste gemeine theilbare Zahl, wie schon gemeldet worden ist. Oder man nimmt auch zwei solche Zahlen, davon der grösste gemeine Theiler schon bekannt ist, und ist also der Mühe überhoben, sich der vorgegebenen Operation zu bedienen. Durch solche Handgriffe aber, welche bei dieser Regel angebracht werden können, kann die ganze Operation ungemein abgekürzet werden; insonderheit, wann man sich durch eine fleissige Übung darinn festgesetzt hat. Wir wollen aber den Gebrauch dieser Regel durch einige Exempel deutlicher erklären. Es soll von diesen Zahlen 4, 5, 6, 9, 10, 16 die kleinste gemeine theilbare Zahl gefunden werden. Hier kann man zuerst diese Zahlen 4 und 16 annehmen, weil sich 16 durch 4 theilen lasst und folglich davon 16 die kleinste gemeine theilbare Zahl ist. Anstatt dieser beiden Zahlen 4 und 16 setzt man also nur 16, und hat folglich nur noch diese Zahlen 5, 6, 9, 10, 16, davon die kleinste gemeine theilbare Zahl gesucht werden soll. Ferner betrachtet man diese Zahlen 5 und 10, deren kleinste gemeine theilbare Zahl, wie vorher, 10 ist und hat also nur noch 6, 9, 10, 16. Nun nehme man 6 und 9, deren grösster gemeiner Theiler 3, und folglich die kleinste gemeine theilbare Zahl 18 ist; und setzt also 18 an die Stelle der beiden Zahlen 6 und 9, so dass also nur noch diese drei Zahlen 10, 16, 18 vorhanden sind.

Hievon kann man 10 und 16 nehmen, deren grösster gemeiner Theiler 2 und die kleinste gemeine theilbare Zahl 80 gefunden wird; sodass jetzo nur noch diese zwei Zahlen 18 und 80 vorhanden sind. Von diesen zwei Zahlen sucht man endlich die kleinste gemeine theilbare Zahl, welche 720 gefunden wird, und diese ist auch die kleinste gemeine theilbare Zahl der vorgegebenen Zahlen 4, 5, 6, 9, 10, 16. Die ganze Operation aber kann folgendergestalt auf das bequemste vorgestellet werden:

$$\begin{array}{c} \cancel{4},\ \ \cancel{5},\ \ \cancel{6},\ \ \cancel{9},\ \ \cancel{1}\cancel{0},\ \ \cancel{1}\cancel{6}, \\ \cancel{1}\cancel{8} \qquad \cancel{8}\cancel{0} \\ 720 \end{array}$$

Nämlich: man streicht gleich diejenigen Zahlen aus, durch welche sich andere von den gegebenen Zahlen theilen lassen, nämlich 4 und 5. Hernach für 6 und 9 setzt man 18, und für 10 und 16 setzt man 80. Endlich aus 18 und 80 findet man 720, welches die kleinste gemeine theilbare Zahl ist. Wann von diesen Zahlen 6, 8, 9, 12, 15, 20, 25 die kleinste gemeine theilbare Zahl gesucht werden soll, so wird die Operation also zu stehen kommen:

$$\begin{array}{c} \cancel{6},\ \ \cancel{8},\ \ \cancel{9},\ \ \cancel{1}\cancel{2},\ \ \cancel{1}\cancel{5},\ \ \cancel{2}\cancel{0},\ \ \cancel{2}\cancel{5} \\ \cancel{7}\cancel{2} \qquad\qquad \cancel{6}\cancel{0} \\ \cancel{3}\cancel{0}\cancel{0} \\ 1800 \end{array}$$

Erstlich streicht man 6 aus, weilen sich 12 dadurch theilen lasst. Zweitens für 8 und 9 setzt man die kleinste gemeine theilbare Zahl davon, nämlich 72, und streicht 8 und 9 aus. Drittens streicht man auch 12 aus, weil sich 72 durch 12 theilen lasst. Viertens für 15 und 20 setzt man 60 als die kleinste gemeine theilbare Zahl. Fünftens für 60 und 25 setzt man 300. Endlich hat man nur noch zwei Zahlen, 72 und 300, deren grösster gemeiner Theiler 12 und folglich die kleinste gemeine theilbare Zahl 1800 ist, welche gesucht worden.

Von diesen Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, wird die kleinste gemeine theilbare Zahl also gefunden:

$$\begin{array}{cccccccccc} \cancel{2}, & \cancel{3}, & \cancel{4}, & \cancel{5}, & \cancel{6}, & \cancel{7}, & \cancel{8}, & \cancel{9}, & \cancel{10} \\ & & & & \cancel{18} & & & \cancel{40} & \\ & & & & \cancel{126} & & 2520 & & \end{array}$$

Erstlich werden 2, 3, 4 und 5 ausgestrichen, weilen dieselben Theiler sind von anderen gegebenen Zahlen. Hernach für 6 und 9 schreibt man 18, für 8 und 10 setzt man 40, für 7 und 18 setzt man 126; und endlich für 126 und 40 findet man 2520, welches die kleinste gemeine theilbare Zahl ist von allen den vorgegebenen Zahlen. Die Ordnung, nach welcher wir die Zahlen genommen, ist, wie schon gemeldet, willkührig und kann wie man immer will verandert werden, wann man nur alle vorgegebenen Zahlen in Betrachtung zieht. Man mag aber eine Ordnung erwahlen, wie man will, so wird man allezeit einerlei Zahl zuletzt finden, welche die kleinste gesuchte gemeine theilbare Zahl sein wird.

6. *Zwei oder mehr Brücke, welche ungleiche Nenner haben, werden folgendergestalt in andere gleiches Inhalts verwandelt, deren Nenner gleich sind. Erstlich nimmt man alle Nenner der gegebenen Brücke und sucht davon die kleinste gemeine theilbare Zahl, welche für den gemeinen Nenner aller Brücke, in welche die gegebenen Brücke verwandelt wérden sollen, angenommen wird. Hernach dividirt man diesen gemeinen Nenner durch einen jeglichen Nenner der gegebenen Brücke, und mit den Quotis multiplicirt man die dahin gehörigen Zähler; so geben diese Producte die Zähler der gesuchten Brücke. Auf diese Art verwandelt man also die gegebenen Brücke in andere, welche den gegebenen dem Werthe nach gleich sind und dabei gleiche Nenner haben.*

Aus demjenigen, was oben von der Natur der Brüche ist angeführt worden, erhellet, dass man einen jeglichen Bruch in einen anderen verwandeln kann, dessen Nenner zwei mal oder drei mal oder mehr mal grösser ist als der gegebene Nenner; dieses geschieht nämlich, wann man sowohl den Zähler als Nenner des gegebenen Bruchs durch 2, 3, oder eine andere beliebige Zahl multiplicirt. Derowegen kann man allezeit einen Bruch in einen anderen verwandeln, dessen Nenner gegeben ist, wann sich nur dieser Nenner durch jenen theilen lasst. Als dieser Bruch $\frac{3}{4}$ kann in einen anderen verwandelt werden, dessen Nenner 12 ist, weilen sich 12 durch 4 theilen lasst, und nämlich 3 für den Quotum gibt. Weilen nun der neue 3 mal so gröss ist als der alte, so muss auch der neue Zähler 3 mal grösser sein als der alte, und derowegen wird der neue Bruch gefunden werden $\frac{9}{12}$. Wann ferner dieser Bruch $\frac{7}{10}$ in einen anderen verwandelt werden soll dessen Nenner 50 sei, so dividirt man 50 durch den vorigen Nenner, und mit dem Quoto 5 multiplicirt man den vorigen Zähler 7; so gibt das Product 35 den Zähler des neuen Bruchs; weswegen also der verwandelte Bruch $\frac{35}{50}$ sein wird, welcher auch, wie leicht zu sehen, dem vorigen Bruche $\frac{7}{10}$ gleich ist; dann wann dieses Brüchs Nenner und Zähler mit 5 multiplicirt wird, so kommt dieser $\frac{35}{50}$ heraus. Wann also ein Bruch in eine andere Form gebracht werden soll, davon der Nenner gegeben ist, doch so, dass sich derselbe durch den Nenner des vorgegebenen Brüchs theilen lasse, so kann der neue Bruch auf diese Art sehr leicht gefunden werden. Man dividirt den neuen Nenner durch den alten, und mit dem Quoto multiplicirt man den alten Zähler, so gibt das Product den neuen Zähler. Hieraus sieht man nun leicht, dass, wann zwei oder mehr Brüche, so ungleiche Nenner haben, in andere verwandelt werden sollen, welche einen gemeinen Nenner haben, alsdann dieser gemeine Nenner so beschaffen sein müsse, dass sich derselbe durch einen jeglichen Nenner der gegebenen Brüche theilen lasse: folglich muss also der gemeine Nenner eine gemeine theilbare Zahl sein der vorgegebenen Nenner. Um derowegen zwei oder mehr Brüche in andere zu verwandeln, welche einen gemeinen Nenner haben, so muss man erstlich von den gegebenen Nenneren eine gemeine theilbare Zahl suchen und dieselbe für den gemeinen Nenner annehmen. Hernach kann ein jeder Bruch nach der vorgegebenen Regel in einen anderen verwandelt werden, dessen Nenner die gefundene gemeine theilbare Zahl ist; und also werden alle diese gefundenen Brüche einerlei Nenner haben. Als wann diese Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$ in andere verwandelt werden sollen, welche gleiche Nenner haben, so sucht man erstlich eine gemeine theilbare Zahl, welche 60 gefunden wird. Hernach verwandelt man einen jeglichen Bruch in einen anderen, dessen Nenner 60 ist; also wird dieser Bruch $\frac{2}{3}$ in $\frac{40}{60}$, dieser $\frac{3}{4}$ in $\frac{45}{60}$ und dieser $\frac{1}{5}$ in $\frac{12}{60}$ verwandelt, so dass man anstatt der gegebenen Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, diese $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{12}{60}$ haben wird, welche , wie verlanget worden, gleiche Nenner haben. Diese Operation pflegt nun die Reducirung der Brüche zu gleichen Nenneren genannt zu werden; und Brüche zu gleichen Nenneren bringen oder reduciren ist nichts anders als die gegebenen Brüche in andere verwandeln, deren Nenner einander gleich sind. Weilen nun diese Operation darauf beruhet, dass man von den Nenneren der gegebenen Brüche eine gemeine theilbare Zahl finde, dergleichen gemeine theilbare Zahlen aber unendlich viel angegeben werden können, so ist klar, dass die Reducirung der Brüche zu gleichen Nenneren auf unendlich viel Arten geschehen könne. Es ist aber leicht zu erachten, dass diejenige Art, welche den kleinsten gemeinen Nenner gibt, allen anderen billig vorgezogen zu werden verdienet. Dann dadurch wird die Rechnung nicht wenig abgekürzet, wann die Reduction der Brüche zu gleichen Nenneren in den kleinsten möglichen Zahlen vollzogen wird. Dieser Vortheil aber wird erhalten, wann man für den gemeinen Nenner der gesuchten Brüche die kleinste gemeine theilbare Zahl der gegebenen Nenner annimmt. Derowegen hat man bei der Reduction der Brüche zu gleichen Nenneren diese Regel in acht zu nehmen: Erstlich sucht man die kleinste gemeine theilbare Zahl aller gegebenen Nenner; und setzt dieselbe für den gemeinen Nenner der gesuchten Brüche. Hernach, um die gehörigen Zähler zu finden, so dividirt man diesen gemeinen Nenner durch den Nenner eines jeglichen gegebenen Brüchs; und mit dem Quoto multiplicirt man den Zähler desselben Brüchs, so hat man den gesuchten Zähler. Diese ganze Operation aber wird durch folgende Exempel mehr erläutert werden.

Erstlich sollen diese Brüche $\frac{5}{12}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{7}{20}$ und $\frac{4}{21}$ zu gleichen Nenneren gebracht oder in andere verwandelt werden, welche gleiche Nenner haben. Man suche also für allen Dingen die kleinste gemeine theilbare Zahl der gegebenen Nenner

$$\begin{array}{cccc} \cancel{1}\cancel{2} & \cancel{1}\cancel{5} & \cancel{2}\cancel{0} & \cancel{2}\cancel{1} \\ \cancel{6}\cancel{0} & & 420 & \end{array}$$

wie vorher gelehret worden, welche 420 ist. Diese Zahl wird nun für den gemeinen Nenner der gesuchten Brüche angenommen; diese Brüche selbst aber werden auf folgende Weise gefunden:

$$\begin{array}{c|cc|} \frac{5}{12} & \frac{175}{420} & 35 \\ \frac{8}{15} & \frac{224}{420} & 28 \\ \frac{7}{20} & \frac{147}{420} & 21 \\ \frac{4}{21} & \frac{80}{420} & 20 \end{array}$$

Nämlich, nachdem man die Querstriche der gegebenen Brüche fortgezogen, so wird unter einen jeglichen der gemeine Nenner 420 geschrieben; hernach dividirt man diesen gemeinen Nenner durch einen jeglichen Nenner der gegebenen Brüche und setzt die Quotos weiter zur Rechten; als 420 durch 12 dividirt gibt 35, und 420 durch 15 gibt 28, und 420 durch 20 gibt 21, und 420 durch 21 gibt 20. Endlich multiplicirt man diese Quotos mit den gegenüberstehenden Zahlen der gegebenen Brüche und schreibt die Producte in die Stellen der Zähler der gesuchten Brüche. Als 5 mal 35 gibt 175, und 8 mal 28 gibt 224, und so fort. Wann dieses geschehen, so hat man die verlangten Brüche von einerlei Nenner zur Seite der gegebenen, welche durch einen Strich von einander abgesondert werden. Die Figur der Operation kann ein jeder nach seinem Gutbefinden ändern, und um der Kürze willen sowohl die Quotos gar weglassen, als auch den gemeinen Nenner nur ein mal oben apart setzen.

Wann diese Brüche

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{7},\ \frac{7}{8},\ \frac{8}{9},\ \frac{9}{10}$$

zu gleichen Nenneren gebracht werden sollen, so wird erstlich die kleinste gern eine theilbare Zahl von allen Nenneren gesucht und dafür 2520 gefunden; hernach aber die Operation folgendergestalt verrichtet:

$$\begin{array}{c|c|r|}
\frac{1}{2} & \frac{1260}{2520} & 1260 \\
\frac{2}{3} & \frac{1680}{2520} & 840 \\
\frac{3}{4} & \frac{1890}{2520} & 630 \\
\frac{4}{5} & \frac{2016}{2520} & 504 \\
\frac{5}{6} & \frac{2100}{2520} & 420 \\
\frac{6}{7} & \frac{2160}{2520} & 360 \\
\frac{7}{8} & \frac{2205}{2520} & 315 \\
\frac{8}{9} & \frac{2240}{2520} & 280 \\
\frac{9}{10} & \frac{2268}{2520} & 252
\end{array}$$

Ein Exempel von Brüchen, so aus grösseren Zahlen bestehen, können diese $\frac{13}{63},\ \frac{22}{105},\ \frac{103}{140}$ geben, welche, da die kleinste gemeine theilbare Zahl der Nenner ist 1260, wie folget zu gleichen Nenneren gebracht werden:

$$\begin{array}{c|c|r|}
\frac{13}{63} & \frac{260}{1260} & 20 \\
\frac{22}{105} & \frac{264}{1260} & 12 \\
\frac{103}{140} & \frac{927}{1260} & 9
\end{array}$$

Aus welchen Exempeln diese Operation, Brüche zu gleichen Nenneren zu bringen, genugsam zu ersehen ist.

7. *Wann sowohl einzele Brücke als ganze Zahlen samt Brüchen entweder zusammen addirt oder von einander subtrahirt werden sollen, so werden vor allen Dingen die Brücke zu gleichen Nenneren gebracht oder in andere verwandelt, so gleiche Nenner haben. Hernach wird die Addition oder Subtraction verrichtet, wie schon oben ist gelehret worden mit Brüchen, deren Nenner gleich sind. Nämlich bei der Addition werden die Zähler der gefundenen Brücke zusammen addirt, und unter die Summe als einen Zähler der gemeine Nenner geschrieben, welcher Bruch die Summe der Brücke anzeiget. Ist nun dieser Bruch grösser als ein ganzes, so werden die ganzen daraus gezogen, und so noch ganze Zahlen zu addiren da sind, mit zu derselben Summe geschlagen. In der Subtraction aber würd der Zähler des unteren Bruchs von dem Zähler des oberen Bruchs subtrahirt, wofern*

derselbe kleiner ist; sollte der untere Zähler *aber grösser sein, so wird der obere Bruch um ein ganzes vermehret und sodann die Subtraction vollzogen.*

In den vorigen Satzen von Nr. 2 und 3 ist schon zur Gnüge gewiesen worden, wie sowohl die Addition als Subtraction mit Brüchen, welche gleiche Nenner haben, vollzogen werden soll. Hier aber kommen wir zu eben diesen Operationen, wann die vorgegebenen Brüche ungleiche Nenner haben. Hiebei kommt nun zu statten, was im vorigen Satze ist vorgebracht worden, wie Brüche von ungleichen Nenneren in andere verwandelt werden sollen, welche gleiche Nenner haben. Wann wir also diese Verwandlung zu Hülfe nehmen, so wird sowohl die Addition als Subtraction in Brüchen, deren Nenner ungleich sind, auf die schon gelehrte Addition und Subtraction in Brüchen, so gleiche Nenner haben, reduciret. Derowegen, wann entweder einzele Brüche oder ganze Zahlen samt Brüchen zusammen addirt oder von einander subtrahirt werden sollen, so müssen vor allen Dingen die Brüche in andere, deren Nenner einander gleich sind, verwandelt, und diese an der vorigen Stelle gesetzt werden, da dann sowohl die Addition als Subtraction, wie oben gelehret worden, verrichtet werden kann. Hiebei ist also nichts mehr zu erinnem übrig, als durch einige Exempel diese beiden Operationen mehr zu erlauteren.

Exempel von der Addition in Brüchen

I. Fragts sich, wieviel $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{6}$ zusammen addirt ausmachen.

Hier ist die kleinste gemeine theilbare Zahl der Nenner 6: man bringt also diese Brüche zu gleichen Nenneren und addirt dieselben wie folget:

$$\begin{array}{r|r|}
\frac{1}{2} & \frac{3}{6} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\
\hline
\end{array}$$

Summa $\frac{4}{6}$, das ist $\frac{2}{3}$.

Also ist $\frac{2}{3}$ die gesuchte Summe von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{6}$

II. Man verlanget die Summe von diesen Brüchen $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{15}$ zu wissen.

Die kleinste gemeine theilbare Zahl von 5, 6 und 15 ist 30, und also wird die ganze Operation wie folget zu stehen kommen:

$$\begin{array}{r|r|}
\frac{3}{5} & \frac{18}{30} \\
\frac{1}{6} & \frac{5}{30} \\
\frac{7}{15} & \frac{14}{30} \\
\hline
\end{array}$$

Summa $\frac{37}{30}$, das ist $1\frac{7}{30}$.

Weilen die neuen Brüche alle einerlei Nenner haben, so kann man um der Kürze willen nur allein die Zähler hinsetzen und den gemeinen Nenner nur apart anmerken; wie in folgendem Exempel zu sehen.

III. Wie gröss ist die Summe von diesen Brüchen
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{1}{8}, \frac{2}{9}$?

Von diesen Brüchen wird der gemeine Nenner 2520 werden, und folglich die Operation sein wie folget:

	$\underbrace{2520}$
$\frac{1}{2}$	1260
$\frac{2}{3}$	1680
$\frac{1}{4}$	630
$\frac{2}{5}$	1008
$\frac{1}{6}$	420
$\frac{2}{7}$	720
$\frac{1}{8}$	315
$\frac{2}{9}$	560

Summa $\frac{6593}{2520}$, das ist $2\frac{1553}{2520}$.

IV. Vier Personen legen Geld zusammen: der erste $15\frac{1}{2}$ Rubel, der zweite $15\frac{3}{4}$ Rubel, der dritte $10\frac{2}{5}$ Rubel und der vierte $8\frac{7}{10}$ Rubel. Nun ist die Frage, wie gröss die ganze Summe sein werde.

Um diese Summe zu finden, so hat man diese Zahlen $15\frac{1}{2}$, $15\frac{3}{4}$, $10\frac{2}{5}$, $8\frac{7}{10}$ zusammen zu addiren, welche Operation sein wird wie folget:

	$\underbrace{20}$
$15\frac{1}{2}$	10
$15\frac{3}{4}$	15
$10\frac{2}{5}$	8
$8\frac{7}{10}$	14

Summa 45 $\frac{47}{20}$, das ist $47\frac{7}{20}$ Rubel

Dann die Summe der Brüche ist $\frac{47}{20}$, das ist 2 und $\frac{7}{20}$; wann nun die zwei ganzen Rubel zu den 45 Rubel gethan werden, so ist die gesuchte Summe $47\frac{7}{20}$ Rubel.

V. Wann folgende Zahlen $217\frac{32}{76}$, $340\frac{28}{45}$, und $425\frac{40}{63}$ zusammen addirt werden sollen, so wird die Summe folgendergestalt gefunden werden:

	$\underbrace{1575}$
$217\frac{32}{76}$	672
$340\frac{28}{45}$	980
$425\frac{40}{63}$	1000
Summa 982	$\frac{2652}{1575}$, das ist $983\frac{1077}{1575}$.

Das ist ferner $983\frac{1077}{1575}$, weilen sich der Bruch durch 3 verkleinem lässt.

Exempel von der Subtraction in gebrochenen Zahlen

I. Man verlanget zu wissen, was überbleibt, wann $\frac{1}{3}$ von $\frac{3}{5}$ subtrahirt werden. Diesen Rest zu finden müssen die gegebenen Brüche zu gleichen Nenneren gebracht, und hernach die Subtraction, wie folget, verrichtet werden:

$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{15}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{15}$
	Rest $\frac{4}{15}$.

II. Wann man den Unterscheid zwischen diesen Brüchen $\frac{12}{17}$ und $\frac{29}{41}$ finden wollte, so muss man den kleineren Bruch vom grösseren subtrahiren; weilen aber noch nicht bekannt ist, welcher Bruch grösser ist als der andere, so muss vorher dieses gesucht werden. Dieses wird nun zugleich gefunden, wann diese Brüche zu gleichen Nenneren gebracht werden; dann dessen Zähler alsdann grösser wird als des anderen, so ist auch derselbe Bruch grösser. Man hat also nur die gegebenen Brüche zu gleichen Nenneren zu bringen und den kleineren vom grösseren zu subtrahiren, wie folget:

$$\begin{array}{c|r} \frac{12}{17} & \frac{492}{697} \\ \frac{29}{41} & \frac{493}{697} \\ \hline \text{Rest} & \frac{1}{697}. \end{array}$$

Also ist $\frac{29}{41}$ grösser als $\frac{12}{17}$ und der Unterscheid ist $\frac{1}{697}$.

III. Von diesen zweien Brüchen $\frac{13}{21}$ und $\frac{55}{89}$ verlanget man zu wissen, welcher der grössere sei, und auch um wieviel der grössere grösser sei als der kleinere. Man bringet diese Brüche also zu gleichen Nenneren, da dann sowohl erhellen wird, welcher grösser ist als der andere, als auch, wie gröss der Unterscheid ist.

$$\begin{array}{c|r} \frac{13}{21} & \frac{1157}{1869} \\ \frac{55}{89} & \frac{1155}{1869} \\ \hline \text{Rest} & \frac{2}{1869}. \end{array}$$

Folglich ist $\frac{13}{21}$ mehr als $\frac{55}{89}$ und der Unterscheid ist $\frac{2}{1869}$.

IV. Von $3\frac{7}{12}$ soll $1\frac{4}{9}$ subtrahirt werden.

Man bringet also die Brüche zu gleichen Nenneren, und verrichtet die Subtraction wie oben gelehret worden.

$$\begin{array}{c|r} 3\frac{7}{12} & \frac{21}{36} \\ 1\frac{4}{9} & \frac{16}{36} \\ \hline \text{Rest } 2 & \frac{5}{36}. \end{array}$$

V. Wann $23\frac{13}{30}$ von $49\frac{8}{105}$ subtrahirt werden sollen, so wird der Rest folgendergestalt gefunden:

$$\begin{array}{c|r} 49\frac{8}{105} & \frac{16}{210} \\ 23\frac{13}{30} & \frac{91}{210} \\ \hline \text{Rest } 25 & \frac{135}{210}, \end{array}$$

das ist $25\frac{9}{14}$.