CHAPTER 6

ON FRACTIONS, AND THE GENERAL NATURE OF THE SAME

1. *In division, if the divisor and the dividend are to be provided thus, so that the operation cannot be performed without a remainder, then the quotient, which will indicate how many times the divisor is contained within the dividend, is called a fraction.*

We have noticed already in the previous chapter in paragraph 3, that by no division can the quotient sought be indicated accurately by whole numbers, since there we had to be satisfied to take the next smallest number for that, and to note the remainder. In these cases therefore the quotient found is not the true quotient ; since for that the remainder arising still must be drawn into the calculation, in order to have a reasonable idea of how many times the divisor is contained in the dividend. As if 17 were to be divided by 5, thus we find by the same given rules, that the quotient is 3, and from that still to be a remainder, namely 2. From this it is apparent, that 5 is contained in 17 more than 3 times, and consequently the true quotient must be greater than 3. Then since 5 is contained in 15 three times, so necessarily 5 in 17 must be considered to be contained more than 3 times. But also nevertheless 5 cannot be contained 4 times in 17 , as 20 is that number, which itself is understood to be contained 5 times. Thus from these it follows, that the true quotient, which is to be designated to be held so many times 5 in 17, must be greater than 3 and yet smaller than 4. Now no whole number is to be found between 3 and 4, hence this quotient cannot be a whole number; but meanwhile the same is still to be a magnitude or number, in so far as we can say, that the same quotient to be greater than 3 and smaller than 4. Now this kind of numbers, which cannot be whole numbers, are called fractions or broken numbers. Thus the true quotient, which indicates, how many times 5 to be contained in 17, is consequently a fraction, that is not a whole number; and from this same fraction we obtain at the same time a thorough understanding from its origin, in as far as the same is a number, which indicates, how many times 5 is contained in 17.

2. *A fraction or broken number, that is the true quotient, which arises from any division, if the divisor is not contained an exact number of times in the dividend, is usually written thus: we write the divisor below the dividend, and draw a line there in between. Thus from the manner written a fraction indicates, how many times the number standing below the line is contained in the other number.*

Since we have already a little understanding of a fraction, as far as the same is a number, which indicates how many times a given number to be contained in another number, thus it will be necessary, that we find a convenient way of expressing such a fraction. Now just as for a fraction, according to its origin, two number come into the calculation, namely the dividend and the divisor, the measure of the fraction indicates the quotient which arises from such a division, thus also these two numbers must be forthcoming in the manner of writing, by which the fraction is expressed. Now this is seen to be very convenient from the method set out, since the dividend is put under the

divisor, and a line drawn between them. Then in this manner we recognise at the same time the origin and value of a fraction, as it were from the manner of indicating the quotient, which arises, if we divide the upper number by the lower one.
In the example given formerly, since 17 must be divided by 5, thus the quotient, which is a fraction, is indicated in this manner $\frac{17}{5}$. Hence a fraction is thus indicated by this manner of writing, and from that we know at once, that the same is a kind of fraction ; namely $\frac{17}{5}$ is a fraction indicating, how many times 5 is contained in 17, or this fraction is the true quotient, that arise here, if we divide 17 by 5. In a like manner, if 8 shall be divided by 7 , thus the quotient is not a whole number, but a fraction and is thus written as $\frac{8}{7}$. And in this manner of writing, $\frac{5}{3}$ is the quotient indicated, which arises when 5 is divided by 3.

3. *In order that a fraction can be compared better with whole numbers, it is to be observed thus that, if unity or a whole number is divided into so many equal parts, as the number standing under the line shows, it contains just as many equal parts, as the upper number indicates.*

This way, itself allowing the value of a fraction to be understood, indeed seems to be distinguished from the above, but comes to be in perfect agreement with it. Namely if this fraction is given $\frac{7}{4}$, thus the same indicates the quotient according to the first method, which arises when we divide 7 by 4. But according to this other method, we say that if a whole be divided into 4 equal parts the fraction of 7 such equal parts is indicated and in itself understood. But the understanding of these two different ways by which the value of fractions can be described, can be shown in this manner. Since $\frac{7}{4}$ indicates the quotient, the outcome if 7 divided by 4, thus from that the fourth part of 7 is to be indicated, then 7 divided by 4 is nothing other than finding the fourth part of 7. From which it is apparent, that any such fraction cannot be indicated other than by the fourth part of the above number, as the under mentioned identifies, which further is a new method, for presenting the value of fractions. As now, so that by the given of $\frac{7}{4}$ to remain, 7 being seven times greater than 1, so must the following also from the fourth part of 7 be greater than the fourth part of 1. If therefore 1 is divided into 4 equal parts, thus each of the same is the fourth part of 1, and thus $\frac{7}{4}$ seven times greater than the part sought. Whereby it follows, that this fraction $\frac{7}{4}$ indicates the seven equal parts, of which 4 parts amounts to a whole or a unit; 7 being seven times greater than 1, the fourth part of 7 must therefore be seven times greater than the fourth part of 1. Therefore, when 1 is divided into 4 equal parts, one of them is the fourth part of 1, and thus $\frac{7}{4}$ is seven times greater than such a part. From this it follows that this fraction $\frac{7}{4}$ indicates seven such parts, of which 4 make up a whole or an entity. From this example it is now easy to understand, that each fraction, if we divided the unit or a whole number into just as many equal parts, as the lower number indicates, such parts to be understood themselves to be just as much, as the above number indicates. And from this we understand at once, that this method agrees exactly with that put in place above.

4. *If a fraction is written in the above mentioned manner, thus the number standing above the line is called the numerator, while the number below the line is called the denominator. But any fraction can be talked about thus: in the first place we call the numerator and the denominator thereof with the added word part. As this fraction* $\frac{5}{12}$ *is called the five-twelfth part.*

According to the origin of fractions from division, the upper number is the dividend, but the lower number the divisor. But the nomenclature just given had it origins in the same formerly displayed property of numbers, that any fraction, if unity or a whole number is divided into so many equal parts, as the lower number indicates, just as many suchlike parts to be understood in itself, as the upper number identifies. Then the upper number indicates the number of such parts, so the same conveniently are called the counters. But the under number is therefore called the denominator [In German, 'Nenner' is the word for the denominator, which may refer to *nennen*, to name], as the same indicates this part in the same manner, how many of the same parts amounts to a whole. it is therefore conveniently called the counter. The lower number is therefore called the denominator, because it names the nature of these parts, indicating how many such parts make up a whole. Thus in this fraction $\frac{7}{10}$ the upper number 7 is the numerator, but the lower number 10 the denominator. And since we thus present the content, that, if the unit or whole number were divided into ten equal parts, the same 7 equal parts to be contained in itself, thus the same can thus by called conveniently by the spoken words : seven tenth parts of the whole. Then while here we present unity itself divided into ten equal parts, thus any such part we call a tenth part of the whole, and seven such like parts, as many namely as realize the fraction $\frac{7}{10}$, are seven tenth parts of a whole. However the last part of the expression *of a whole*, being the same for all fractions arising, is generally to be left off, so that this fraction $\frac{7}{10}$ is usually only called the seven-tenths part. In the same way this fraction $\frac{15}{28}$, is called the fifteen twenty-eighth part, and this fraction $\frac{3}{4}$, the three quarters part. The numerator is 1, thus such a fraction is indicated by a single part, so many of that kind as the denominator indicates, that amounts to a whole. Therefore this fraction $\frac{1}{3}$ is called a third part, or equally, a third; again $\frac{1}{4}$ is called a quarter, $\frac{1}{5}$ a fifth, and so forth. But if the denominator is 2, so instead of two parts is called a half, as $\frac{1}{2}$ is called in halves, $\frac{3}{2}$ three halves, and so forth. From this it is easy now to understand both the manner of writing as well as the nomenclature of fractions; but to discern the values or the true contents of fractions other than what has been said already, the following to be of service.

5. *In a fraction the numerator is smaller than the denominator, thus also the fraction is smaller than a whole number or 1. But if the numerator is greater than the denominator, thus also the contents of the fraction is greater than 1. But a fraction, since the numerator is equal to the denominator, contains just a whole number.*

The truth of this, which is to be argued here, can be understood easily in the two ways, according to which we ourselves have presented the fractions. Then since according to the first method a fraction indicates the true quotient which arises, if we divide the upper number by the lower number, thus it is clear, that if the upper number is smaller than the lower one, these do not go into each other once, but to be contained less times therein; on that account in such cases the quotient, that is the contents of the number, must be less than 1. As $\frac{3}{7}$ indicates the quotient, which arises if we divide 3 by 7. But now 7 is not contained in three once, then 1 times 7 makes 7, that is more than 3; but still 7 goes into 3 more than no times or contained more than 0 times, then 0 times 7 makes 0, that is less than 3. From this it follows thus, that this fraction $\frac{3}{7}$ or the true quotient, thus arises, if 3 is divided by 7, to be less than 1, and still greater than zero. In an equal way we see, that if the above number is greater than the lower number, as then this is contained in those more than one time and consequently the content of the fraction must be greater than 1. Thus $\frac{7}{5}$ is greater than 1, then if I divide 7 by 5, 1 arises in the quotient and still 2 left over, whereby the true quotient, that is the value of the fraction $\frac{7}{5}$, must be greater than 1. It gives also in like manner the fractions, which are greater than 2, 3, 4, and so forth; as $\frac{15}{4}$ is greater than 3, and $\frac{30}{7}$ greater than 4, as is clear from the division. But that a fraction, in which the numerator is equal to the denominator, just amounts to 1, lets itself from this also easy to be seen. Since then the upper number is equal to the lower number, so these just in this case are contained one time, and so the true value of the quotient is 1. Namely $\frac{4}{4}$ is as great as 1, then $\frac{4}{4}$ is the quotient, thus arising, if we divide 4 by 4 ; but this quotient is 1 without a remainder, and so $\frac{4}{4}$ is as great as 1. Likewise it gives also the fractions, which 2, 3, or any other whole number amounts to ; so is $\frac{6}{3}$ as great as 2, $\frac{12}{4}$ as great as 3. Moreover these equal fractions are equally without fractions, in that their value can be given by whole numbers. But while the manner of writing still has the form of a fraction, and thus such fractions to be called pseudo or apparent fractions, and also to be used in fraction calculation. Such apparent fractions are all these, the denominator of which is 1; then since any number divided by 1 itself further arises, thus any such number is treated just as much as the number itself indicates. Namely $\frac{7}{1}$ is 7, and $\frac{13}{1}$ is 13. Thus in such a manner any whole number can be brought into the form of a fraction, which is often necessary in fraction calculations. But all these, which we derived from our first definition of fractions, likewise follow from the other and still easier. Since then we divided a whole number into just as many parts, as the denominator of a fraction indicate, and as then the fraction itself contains just as many suchlike parts as the numerator directs, thus it is clear that, if the numerator is equal to the denominator, then the fraction contains just as many parts as the whole amounts to, and consequently amounts to a whole. And while further a whole holds just as many parts, as the denominator indicates, so must a fraction, of which the numerator is smaller than the denominator, be smaller than 1, and a fraction, whose numerator is greater than the denominator, be greater than 1. Then in the former case there are fewer parts, but in the latter more parts are contained, than to be necessary for a whole.

6. *A fraction, which is greater than 1, or in which the numerator is greater than the denominator, can be split up into two terms of the following form, of which one is a whole number, but the other is a fraction, which is less than a whole. Namely we divide the numerator by the denominator in the prescribed manner of division, and that gives the quotient that is a one part, namely the whole number, but the remainder gives for the second the fractional part, from which the previous denominator is taken.*

In order to make the contents of these propositions clearer, thus this fraction $\frac{20}{3}$ to be given which is greater than 1, as the numerator is greater than the denominator. Now in order to know, how many whole numbers are contained in this fraction, and also the same as for a fraction, thus we divide the numerator 20 by the denominator 3; since then in the quotient the whole number 6 appears and still the remainder 2 to be left over. This remainder 2 gives now the numerator of the fraction, of which the denominator is 3, namely $\frac{2}{3}$. For this we say, that the fraction presented $\frac{20}{3}$ to be as great as 6 whole together with $\frac{2}{3}$, which whole number together with the fraction thus written to be customarily $6\frac{2}{3}$, since the fraction is put in place after the whole number, and such an expression to be called a whole number with a fraction. Thus $\frac{20}{3}$ is just as great as $6\frac{2}{3}$; $\frac{33}{7}$ is as much as $4\frac{5}{7}$, and $\frac{51}{11}$ as much as $4\frac{7}{11}$. Then if we divide 33 by 7 , thus the whole quotient 4 arises, and the remainder 5, to which the attached fraction $\frac{5}{7}$ is put in place. Moreover if we divide 51 by 11, thus the whole quotient 4 comes out and still 7 remains, from which the fraction $\frac{7}{11}$ arises. In this manner we know thus equally, how many whole numbers are contained in a fraction, and what fraction still also belongs to that. Namely we find a whole number along with a fraction, which together amounts to just as much, as the proposed fraction. Through this operation we obtain also a clearer understanding of a fraction, in that we know, how many whole numbers the same contains and what kind of fraction to be understood in the same. Moreover it is clear, that this attached fraction always must be smaller than a whole number, since the remainder has arisen from the division, which always is smaller than the divider, thus to be made the denominator. According to this, the knowledge of any fraction, greater than a whole, is brought to the knowledge of a fraction smaller than 1, so that whoever has obtained a clear notion of fractions smaller than 1, at the same time receives a clear idea of all other fractions. Thus anyone who knows what $\frac{1}{3}$ is, likewise knows what $\frac{10}{3}$ means, in that $\frac{10}{3}$ is as much as $3\frac{1}{3}$, that is 3 wholes together with $\frac{1}{3}$. Now this serves for the explanation and use of the given rule ; moreover the basis of which is itself easily understood from the nature of fractions.

Since then the contents of any fraction is nothing other than the true quotient, thus arising, if we divide the upper number, that is the numerator, by the under number or denominator, thus this content is found by the actual division. Moreover through this division we find in the first place a whole number in the quotient, but which does not amount to the true quotient, if there is still a remainder present. Then in order that the full quotient be found, thus the remainder must still be divided by the divisor, and what arises to be the true quotient put in place. Now this division of the remainder by the divisor occurs by means of a fraction, since the remainder is called the numerator, but the dividing part or the denominator of the fraction arising to be called the denominator. Thus since any fraction is nothing other than the entire quotient that arises if the numerator is divided by the denominator, then the same also to be described equally through the division found by the complete quotient ; namely the whole number found through the division for the quotient, together with the fraction, of which the numerator is the remainder left behind, but the denominator is just the denominator of the previous fraction. This therefore is the basis of the given rule, by which we can change a fraction which is greater than 1, into a whole number together with a fraction.

7. *A whole number together with a fraction is changed into a single fraction, if we multiply the whole number by the denominator of the fraction and add the numerator of the fraction to the product, since then this sum gives the numerator of the single fraction sought, but the denominator from the former given denominator.*

This operation is nothing other than an inversion of the above, since before we have learned that a fraction, that is greater than a whole number, can be transformed into a whole number along with a fraction. But here the operation is reversed, and it is taught, how we should again transform a whole number together with a fraction into a single fraction. Both operations are themselves very useful; as through the first, as we have already mentioned, a more thorough understanding of the contents or value of a fraction is obtained, but the second is most necessary in the following operations with fractions, since, in order to accomplish the same, generally a whole number together with a fraction attached must be changed into a single fraction. Now the given rule behaves thus : let there be given $7\frac{2}{3}$, namely a whole number 7 together with the fraction $\frac{2}{3}$, from which a single fraction is to be made. Thus we multiply 7 by 3, and to the product 21 we add 2, thus 23 arises for the numerator of the sought fraction, of which the denominator is 3, namely $\frac{23}{3}$. Now in so much as this fraction $\frac{23}{3}$ shall be just as great as $7\frac{2}{3}$, it is clear from the above proposition, thus $\frac{23}{3}$ is transformed into $7\frac{2}{3}$. But the basis itself of this transformation is this : Any number along with the attached fraction can be viewed as the true quotient arising from a division, since the divisor is the denominator of the attached fraction, while the whole number of the quotient in whole numbers is the same as found in division, but the numerator of the fraction is the remainder. In this division the number itself requiring to be divided is sought [the dividend], which thus can be understood to be equal to a single fraction that gives, through that division the true quotient, that is the given whole number along with the attached fraction, thus to be equal to a single fraction, giving thus the true quotient, that is the given whole number with the attached fraction to be expressed ; namely the dividend gives the numerator, but the divisor the denominator of the sought fraction. In this division, then, the dividend is questioned, which, as it is known, immediately gives a single fraction, thereby expressing the true quotient, that is, the given integer, together with the appended fraction; namely the dividend becomes the numerator, but the divisor the denominator of this fraction sought. Moreover from the divisor, the quotient and the remainder are found from the dividend, if we multiply the quotient by the divisor and add to that the remainder. Just as now the number requiring to be divided gives the numerator of the sought fraction, thus will the same be found, if we multiply the whole number by the denominator of the fraction and add the numerator to this product. But the denominator of this fraction is the divisor, that is the denominator of the attached fraction itself. This is all based on the nature of division and that is appropriate, which is to be found in the previous rule for finding the true quotient. Following this rule we understand thus, that $2\frac{1}{3}$ is just as great as 2 times 3 makes 6 and 1 to that gives 7 for the numerator of the single fraction, of which the denominator is 3 as before. Likewise $5\frac{3}{4}$ is as great as $\frac{23}{4}$ then 4 times 5 is 20 and 3 to that gives 23. Thus $128\frac{173}{320}$ is as great as $\frac{41133}{320}$, as to be seen from the operation added.

$$\left.\begin{array}{rl} 128 & \\ \underline{320} & \text{the denominator} \\ 2560 & \\ 384 & \\ \underline{173} & \\ 41133 & \text{the numerator} \end{array}\right\}\text{the fractions sought.}$$

8. *A fraction maintains its value unchanged, if we multiply both the denominator and the numerator by an arbitrary number. And likewise also a fraction maintains its true value , if we divide both the numerator and the denominator by an arbitrary number. From which it is thus apparent, that any fraction, without its value changed, can be presented in an infinite number of ways.*

To clarify this proposition, thus let us provide this fraction $\frac{2}{3}$ as an example; if the numerator and denominator of the same are multiplied by 2 , thus this fraction arises hereof $\frac{4}{6}$, which is completely equal to the original fraction $\frac{2}{3}$. Now further if the numerator and denominator of the fraction $\frac{2}{3}$ is multiplied by 3, thus we have $\frac{6}{9}$, which again is just as much as $\frac{2}{3}$. Thus if we continue to multiply by 4, 5, 6 and so forth, so the following fractions arise from this $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{18}$, and so forth further, which all contain just as much as $\frac{2}{3}$. Likewise all the following fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$ and so forth are equal to each other, and any one of these is just as great as a half.

Thus, it may happen that the very same fraction may be presented in an infinite number of ways, in that, if both the numerator as well as the denominator may be multiplied by any number, a fraction arises that is equal to the previous ones. But in this manner, namely by multiplication, we obtain always numbers which are composed of numbers larger than the previous ones. But is clear, that again these fractions must be found from these composed of greater numbers, which are composed of smaller numbers, and from which by multiplication those are composed. Now this happens through division, since by this, both the denominator and the numerator is divided by some number, if namely division is involved. Then equally as from this fraction $\frac{3}{5}$, if it is multiplied above and below by 7 , this fraction arises $\frac{21}{35}$, thus again from this fraction $\frac{21}{35}$ we obtain the former $\frac{3}{5}$ if we divide both the denominator and the numerator by 7 . From this twofold manner, a fraction to be transformed into another, we see now that we can indicate fractions, which both are composed from greater or smaller numbers, as is a previous fraction, and still are equal to the same value; of which the former takes place by means of multiplication but the latter by division. But it must be remembered in advance, that both the operations of multiplication and division not to be confused with the actual multiplication and division of the fractions ; then by the method just described a fraction is only used in another form, without changing its value. But if a fraction may be either multiplied or divided, thus we look for a fraction, which shall be either larger or smaller than the former ; so that these operations, which belong to the kinds of numbers, are completely different from the transformations described here. Now in order to come to the basis if this transformation, that a fraction may be brought into another form, without its value being changed, thus the same must be deduced from the nature of the fractions themselves; whereby before all things it is to be observed, that a fraction is nothing other than the true quotient, which arises, if we divide the numerator by the denominator. Therefore any fraction indicates, how many times the denominator is contained in the numerator. Moreover it is clear, that just as many times as the denominator is contained in the numerator in a fraction, now twice the denominator is to be contained in twice the numerator in just as many times, and consequently now also half the denominator is contained just as many times in half the numerator ; from which then it is apparent, that if we either multiply or divide both the numerator and the denominator by 2, the presented fraction is just as great an amount as the original. Just as we now see easily, that what was to be said for the number 2, is correct; thus lets itself now be the same for the number 3, 4, and furthermore of any number considered. From this now follows the above proposition, that a fraction loses nothing of its value, if both equally, the numerator and the denominator, are to be multiplied or divided by any arbitrary number. The following example can shed further light on this operation by multiplication:

$$\frac{4}{7} \text{ is just as large as } \frac{8}{14}, \frac{12}{21} \text{ or } \frac{16}{28}.$$

In the same manner $2\frac{1}{3}$ is as large as $2\frac{2}{6}$ or $2\frac{3}{9}$, while $\frac{2}{6}$ and $\frac{3}{9}$ are as large as $\frac{1}{3}$ and the whole number 2 is the same for all. Likewise 3 is as much as $\frac{6}{2}$, likewise as $\frac{9}{3}$, as $\frac{12}{4}$ and so forth; then 3 is as great as $\frac{3}{1}$, now if we multiply above and below by 2, 3 or 4, thus from here there arises $\frac{6}{2}$, $\frac{9}{3}$ and $\frac{12}{4}$, which fractions consequently are as great as 3. Now from this we see, that any whole number can be changed into a fractional form of an arbitrary denominator; as if we wanted a fraction, that is as great as 5 and of which the denominator shall be 6, thus we have $\frac{30}{6}$.

In order to set out an example of this operation by division, thus we must take such a fraction, of which the denominator and the numerator allow themselves to be divided by a number which does not apply to all. Therefore, although the multiplication by all fractions can be done, thus still the division can only be brought about by such, in which the numerator and denominator allow themselves to be divided by a common number. Therefore if a fraction is not so provided, then the division cannot be done in any other form, and consequently cannot be expressed by any other numbers. Such a fraction is $\frac{8}{15}$, since no number divides both 8 and 15, whereby the contents of this fraction cannot be expressed by smaller numbers. Then although 1 or the unit divides both 8 as well as 15, thus by this division the form of the fractions is not changed. But if this fraction should arise $\frac{36}{60}$, thus we see that both the numerator and the denominator are allowed to be divided by 2, moreover this fraction thus is changed into this $\frac{18}{30}$. But in this fraction $\frac{18}{30}$ again both numbers allow themselves to be divided by 2, through which we arrive at the fraction $\frac{9}{15}$. Further here both numbers allow themselves to be divided by 3, since then there arises $\frac{3}{5}$, which fraction consequently is just as large as $\frac{36}{60}$, and from this all could have been brought out at once, if we may have seen that both the numbers 36 and 60 are allowed to be divided by 12. Then if we divide the numerator and denominator of this fraction $\frac{36}{60}$ by 12, from this there comes $\frac{3}{5}$. Now while by this operation, which is done by division, and thereby a fraction is reduced to smaller numbers, before all else it is necessary to know, whether both numbers of a fraction are allowed to be divided by a common number, and further, what this divisor is for a number, thus we want to give some instructions for that in the following proposition.

9. *In order to see to some extent, whether a given number can be divided by another, we have the following eight rules, which are to be taken into account for the reduction of fractions.*

1. All these numbers can be divided by 2, if the last figure of which at the right hand can be divided by 2.
2. A number can be divided by 4, if the last two numbers at the right hand can be divided by 4 .
3. A number can be divided by 8, if the last three numbers at the right hand can be divided by 8.
4. A number can be divided by 5, if the last figure to the right is either 5 or 0.
5. A number can be divided by 10, only if the last figure to the right is 0.
6. A number can only be divided by 3, if the sum of all the figures, from which the number is composed, can be divided by 3.
7. A number can only be divided by 9, if likewise the sum of all the figures, from which the number is composed, can be divided by 9.
8. A number can only be divided by 6, if likewise it can be divided by 2 and by 3.

But whether or not a number can be divided by 7, cannot be given by a shorter and easier rule other than we settle the matter by doing the actual division.

The basis of these rules rests on the assumed way of expressing all numbers by means of units, tens, hundreds, thousands, and so forth; therefore it will not be unhelpful for more instruction, the understanding of the same to be set out further; in particular, since the same are commonly used without any proof. Thus we consider any number to be composed from just as many parts added together, as the figures themselves contain, so that the first contains the units, the second the tens, the third the hundreds, and so forth. As now for the first rule, thus it is to be considered that the tens, hundreds, thousand, and so on further all can be divided by 2. If, therefore also the units are divisible by 2, thus also the whole number is divisible by 2; but this happens, if the last figure to the right is divisible by 2, or if the same is either 0 or 2, 4, 6, 8. On this also are based the 4^{th} and 5^{th} rules; then the tens, hundreds, thousands etc. can be divided by 5 and 10. Therefore, if also the units can be divided by 5 or 10, then the whole number also can be divided. But now the last figure to the right contains the units; and consequently can be divided by 5 or 10 , if the last figure can be divided by that, that is namely 5 for the first case, if the last figure is either 0 or 5, but in the other case for 10, if the last figure is 0. To prove the second rule, thus it is to be noted, that all the hundreds, thousands, and so forth are divisible by 4; thus if the tens together with the units can be divided by 4 , so the whole number is divisible by 4. But the two last figures on the right hand side contain the tens and units, and consequently the whole matter depends thereof, whether these two numbers themselves, or furthermore the number, which is indicated by that, is divisible by 4; thus 1736 is divisible by 4, as 36 is so divisible. An equal situation is had also in the third rule, since 1000 is divisible by 8, so that the thousands and the following higher kinds are divisible by 8. Therefore, if the number is divisible by 8 in the hundreds, tens and units taken together, then the whole number also is divisible by 8 ; moreover this happens, if the number itself, which through the last three figures to be indicated from the right, to be divisible by 8. Thus this number 13896 can be divided by 8, as 896 can thereby be divided. The proofs of the 6^{th} and 7^{th} rules presents more difficulty, but however the same can be brought about in the following manner. If a number of the tenth, hundredth, thousandth, or higher kind shall be divisible by 3 or 9, just as much remains left as if an equal number of units were to be divided by 3 or 9 ; as if 700 were divided by 3 or 9, thus just as many to remain over, as if 7 alone were to divide by that. Thus if a number, consists of so many figures, is divided by 3 or 9, then just as much remains left over as if all the figures were indicated by units, and all taken together were divided by 3 or 9 . Now while a number can be divided by another number, if nothing is left over, so will any such number be allowed to be divided by 3 or 9, if the sum of all the figures can be divided by that. Thus let 1737 itself be divided by 3 and 9, then the sum of the figures makes 18, which number can be divided by 3 and 9. With large numbers, if the sum of the figures itself is itself rather large, and is composed from several figures, so this advantage can be applied again, and the sum of these figures themselves can be examined. As if it were asked, if this number would be able to be divided by 3 or 9,

$$5\ 987\ 625\ 798\ 634,$$

thus we must add all the figures together, so that then there appears 79 ; the figures of this number taken together further makes 16, and as this number still consists of two figures, so we add the same together again, so that 7 arises. From which it is apparent, that if the above number were divisible by 3 or 9 , just as many would remain over, as if it were divided, as if 7 were to be divided, namely 1 in the first case, and 7 in the second case. The 8th rule follows from the first and sixth; then if a number lets itself be divided into two and equally into three equal parts, then the same also to be divided into six equal parts. Finally it is to be noted, that through all these rules not only is it known, whether or not a number is divided by some prescribed number, but also, how much is left behind the last case, as can be seen from the last example presented of 3 and 9, although this does not serve our current purpose, in other cases it still can be of great advantage. Now if we have understood these rules well, so that often we can see at once from a previously given fraction, if both its numerator and denominator can be divided by a common factor, and consequently if the fraction can be changed into another of equal value, but composed of smaller numbers. It contributes very much to the recognition of a fraction, if the numbers from which it is composed are as small as possible; and thus the reduction of fractions to a more distinct understanding is most useful. Therefore it will be helpful to introduce some examples, in which fractions are changed into easier ones by means of the given rules.

I. Let us present this fraction $\frac{122}{356}$, in which we see after the first rule, that both numbers can be divided by 2, as the last figures 2 and 6 thereby are themselves so divisible ; if we therefore divide the numerator and denominator by 2, thus this fraction arises $\frac{61}{178}$, which is equal to the former.

II. If this fraction were found $\frac{368}{1032}$, thus we saw at once according to the second rule, that both numbers can be divided by 4, as the two last figures from there, namely 68 and 32, thereby are divisible. Yes we can actually see and use the third rule here, that both numbers are divisible by 8, as the three last figures, namely 368 and 032, that is 32, are divisible by 8. Accordingly if we divide by 8, thus the previous fraction is transformed into this one, $\frac{46}{129}$. But here it is to be remembered, that it is not necessary for the 2nd and 3rd rules to give much difficulty, in that the usage in the first two is self-evident ; as to be enough in the given fraction $\frac{368}{1032}$, if we see, that both numbers are divisible by 2 , whereby thus this fraction $\frac{184}{516}$ arises; by which we see, that both numbers themselves can still again be divided by 2, since we than come upon $\frac{92}{258}$. Here we see at once that again, the two numbers are divisible by 2, through which division the fraction found above $\frac{46}{129}$ arises.

III. If this fraction were found $\frac{7350}{8900}$, thus we saw at once according to the fifth rule, that both numbers are divisible by 10, therefore after performing this division by 10 this fraction $\frac{735}{890}$ emerges. Further by this fraction the fifth rule finds a place, as the upper number is divisible by 5, but the lower ends with 0 ; therefore both are divisible by 5. Now if we divide both numbers by 5, thus we arrive at this fraction $\frac{147}{178}$, which is just as large as the proposed. Hereby it is now to be noted, that these fractions, of which the numerator and the denominator can be divided by 10 and consequently themselves ending on one or more zeros, to be the easiest to be reduced to smaller numbers, in that it was only necessary, to cut off one or two or more zeros above and below. Thus $\frac{30}{50}$ is just as much as $\frac{3}{5}$, $\frac{120}{700}$ as much as $\frac{12}{70}$, and $\frac{29000}{50000}$ as much as $\frac{29}{50}$.

IV. Let this fraction $\frac{4623}{10548}$ be given to us, to be expressed by smaller numbers; now as both the numbers cannot be divided together by 2, 5, nor 10, so we want to see if they both cannot be divided by 3 or 9, which happens according to the sixth and seventh rules, if we add the figures both of the numerator and denominator. But the numerators of the figures added together make 15 and the denominators 18, from which it is clear, that both numbers can be divided by 3, from which this fraction $\frac{1541}{3516}$ arises.

But if these rules have a main purpose in reducing fractions, so we can still by means of the same only see, whether both numbers are divisible by 2, 3, 5 or 10, and from that the equal fractions cannot be made into smaller numbers, for which these rules cannot be used. Therefore it is necessary, that another general rule to be given at hand, by which means we can always find these numbers, by which both numbers, namely the numerator and the denominator, can be divided.

10. *A common divider of two numbers is such a number, is such a number, that can divide both numbers; and the greatest common divider is the greatest number, by which both numbers can be divided at the same time. But in order that the greatest common divider can be found from two given numbers, we have this rule : We divide the larger number by the smaller, or set the smaller to be the divisor, and the larger to be the dividend ; hereon we divide the divisor by the remainder left over, that is, we make the second division after the first, in which the remainder found is taken as the new divisor, but the previous divisor to be taken as the new dividend; and we proceed forth with such divisions, so that always the former remainder of the previous division to become the following divisor, and the divisor of the previous to be put the dividend of the following, until we come to a division, which is resolved without a remainder. And there the divisor of this last division is the greatest common divisor of the two given numbers.*

When here and in the following propositions the discussion is about numbers, thus it's always understood to be about whole numbers, although fractions also certainly belong with whole numbers. All numbers are now divisible by 1, because all can be divided by 1 without a remainder; further also any number is divisible by itself, and therefore it has at least two divisors, namely itself and unit. Moreover a divisor of a number is one such number, by which the same number can be divided without a remainder, as 3 is a divisor of 12, and 5 a divisor of 15. Now here a principal difference arises to be observed in numbers ; then some numbers are so constructed, that they cannot be divided by any other numbers apart from unity and themselves, which thus conveniently can be called indivisible numbers ; such numbers are 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 and so on, as which have no other divisor apart from unity and themselves.

But the remaining numbers, which also can be divided by themselves and unity, still can be divided by other numbers, are to be called divisible numbers, of which kind are 4, 6, 8, 9, 10, 12 and so forth. From such numbers in particular these are to be noted, which themselves are to be divisible by 2, and called even numbers to be taken care of, such as 2, 4, 6, 8, 10, 12 and so forth, which are known at once from the first rule of the above proposition. Since on the contrary these numbers, which are not divisible by 2, to be called odd numbers, such as 3, 5, 7, 9, 11, 13 and suchlike, to which also unity itself belongs. Now since we clarify, what we mean by the divisor of a number, thus also it is easy to understand, what a common divisor of two or more numbers is, namely such a number, by which each of the same numbers can be divided; thus unity is a common divisor of all numbers, but on that account of no use in our procedure, to bring the fractions into smaller numbers, as the division of numbers by unity leaves the numbers unchanged. Now two such numbers, which as well as unity have still one or more common divisors, are called divisible numbers, such as are 12 and 15, as both are divisible by 3 ; likewise 7 and 21, then both are divisible by 7. But such numbers, which besides unity have no common divisors, to be called indivisible numbers, such as are 7 and 9; likewise 15 and 28. If therefore a fraction is provided thus, that the numerator and the denominator are indivisible between themselves, thus the same cannot be expressed by smaller numbers ; such fractions are accustomed to be called irreducible, as they are unable to be made into smaller numbers, which operation is usually called the cancellation of fractions. But if the numerator and denominator of a fraction are numbers divisible between themselves, so that the fraction with the common divisor removed is to be expressed by smaller numbers, therefore such fractions can be called also reduced fractions. Now in order to understand reduced fractions, and the same to be brought into smaller numbers, thus we have advanced the prescribed rule, by means of which we not only have we been given a common divisor of two given numbers, namely if they divide each other, but even the largest common divisor can be found. But through that we have this advantage, that we can at once bring all the divisible fractions by means of the greatest common divisor to the smallest possible numbers, and to become irreducible, from which we can ascertain, that these cannot be reduced any further by any smaller numbers. Now the given rule, about finding the greatest common divisor of two numbers, is short and easy to apply in all cases ; but nevertheless before indicating its basis, we will provide some enlightenment by a few examples. Let us therefore prescribe these two numbers 1578 and 2904 , of which we want to know the greatest common divisor ; we thus divide 2904 by 1578 as follows:

$$\begin{array}{rrl} 1578) & 2904 & (1 \\ & \underline{1578} & \\ & 1326 & \end{array}$$

thus we find 1326 for the remainder; by such according to the rule we divide the above divisor 1578, namely:

```
1326) 1578 (1
      1326
       252
```

Further 1326 must be divided by 252 :

```
252) 1326 (5
     1260
       66
```

Again we divide 252 by 66 :

```
66) 252 (3
    198
     54
```

Now 66 to be divided by 54 :

```
54) 66 (1
    54
    12
```

Now 54 must be divided by 12 :

```
12) 54(4
    48
     6
```

Finally we have 12 to divide by 6 , which division, which going off without any remainder, indicates that 6 is the greatest common divisor of the two given numbers. Thus if this fraction $\frac{1578}{2904}$ were to be set out, thus we can cancel the same by 6 and it changes into this fraction $\frac{263}{484}$, which is irreducible and cannot be expressed in terms of any smaller numbers. If these numbers 3735 and 4815 should be given, thus the whole operation according to the given rule can be put in place in the following form:

```
3735) 4815 (1
      3735
      1080(3735 (3
           3240
            495) 1080(2
                  990
                   90)495(5
                      450
                       45) 90(2
                           90
```

From which operation we see, that 45 is the greatest common divider of the given numbers.

But were the numbers indivisible between each other, thus this same operation indicates, since it is found that one is the greatest common divisor, as to be seen from the following example, given these numbers 36 and 151:

```
36) 151 (4
    144
      7)36 (5
        35
         1)7 (7
           7
```

Moreover with that we come at last to the basis of this operation, thus it is for everything to note, that if two numbers have a common divisor, as then also the difference of the two numbers can be divided by the same divisor ; likewise also the difference of the first and the double, or treble, or any other multiple of the other number be so divided. But now, if the larger number be divided by the smaller number, then the remainder is nothing other than the difference between the largest number and a multiple of the smaller. Therefore a common divisor of the two numbers also divides the remainder, which is left behind in the division of the larger number by the smaller. In such a form every common divisor of the two given numbers will at the same time be a common divisor of the divisor and the remainder. In the same way as when the previous divisor is divided by the remainder, each common divisor of the two initial given numbers will again divide the divisor and remainder of that last division, and so on in all subsequent divisions. Now if thus finally we come to a division, which is performed without a remainder, thus both the dividend and the divisor have this same last division, which both the beginning numbers have between themselves. But while this last division is performed without a remainder, thus the divisor is not only a common divisor of the divisor and the dividend themselves, but also the greatest common divisor; from which it then follows, that this last divisor also must be the greatest common divisor of the of both the fore given numbers. So this is the basis of understanding the rule, through which the greatest common divisor of two numbers can be found, from which the use in reducing or cancelling the fractions has in fact already been invoked to some extent, but which will lead to greater use in the following proposition.

11. *In order to judge of a given fraction, whether or not the same can be expressed by smaller numbers, thus we must search for the greatest common divisor of the same numerator and denominator. Now if we find 1 for the greatest common divisor, thus it is an indication that the fraction cannot be expressed by smaller numbers. But if there arises another greater common denominator, thus the given fraction can be brought into smaller numbers, namely if we divide the given numerator and denominator by the given greatest common denominator, whereby this is still to be observed, that the fraction, which we have obtained in this manner, can be reduced or cancelled no further, and consequently from that the proposed fraction is expressed in the smallest numbers.*

We have already seen above, that any fraction can be expressed in an infinite number of ways, without its contents changing, which transformations of fractions will have an indispensible use in the following chapter. But here, since we are concerned only with the nature of fractions, thus it is beyond all doubt that, the smaller the numbers are, by which a fraction is represented, the more distinctly and easier we can form an idea of the value of the fraction. On that account here the given rule to be of the greatest use, through which we learn how to present a fraction in its smallest possible numbers; in so far as with the help of the same we can certainly either bring a fraction to its smallest numbers, or where such a cancellation cannot be found, we can be sure that the fraction presented to be irreducible, and cannot possibly to be represented by smaller numbers. This transformation into the easiest form how has been done by finding the greatest common divisors of both numbers of fractions, namely the numerators and denominators, from which the above propositions have provided sufficient instruction. Therefore, if we have found the greatest common divisor of the numerator and denominator, thus the given fraction can be easily brought into the smallest numbers, namely if according to the eighth proposition we have divided both the numerator and the denominator by the least common denominator, since then the fraction obtained from this still has the same value, but thereby composed from the smallest possible numbers, and consequently with no further cancellation necessary. Now since these operations have already been performed sufficiently, thus it still remains to provide a few examples for the resolution of this chapter .

I. Let us give this fraction $\frac{3080}{8547}$, which where possible, can be expressed by smaller numbers, and these may be expressed by the smallest of all numbers.

Thus, before all things, we look for the greatest common divisor of both the numbers 3080 and 8547, as follows:

$$\begin{array}{l}
3080)\ 8547\ (2 \\
\qquad\quad \underline{6160} \\
\qquad\quad 2387(\ 3080\ (1 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{2387} \\
\qquad\qquad\qquad\ \ 693)\ 2387\ (3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{2079} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \ 308)\ 693\ (2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{616} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ 77)\ 308\ (4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{308}
\end{array}$$

From which it is apparent, that 77 is the greatest common divisor of both numbers, from which the fraction is composed. Therefore, we divide both the numerator and the denominator of the given fraction, in order that this fraction $\frac{77}{111}$ comes out, which can be cancelled down no further.

II. Someone has 24 Solotnick [an old Russian unit of mass] of silver and would like very much to know how much of a pound he has got.

While a pound contains 96 Solotnick, thus this person has $\frac{24}{96}$, that is the twenty-fourth of the ninety-sixth part of a pound; therefore the question follows from this, where it may be possible to express this fraction all in smaller number. We therefore seek the greatest common divisor of 24 and 96, thus

$$\begin{array}{r} 24)\ 96\ (4 \\ \underline{96} \\ 0 \end{array}$$

whereby both numbers are divisible by 24 . If we now cancel the fraction by 24, thus this fraction $\frac{1}{4}$ arises, from which we see, that the given weight is just a quarter of a pound.

III. If we had found this fraction $\frac{9222}{1740}$, and wanted to know, if the contents of the same may not be expressed by a shorter method, thus we would advance as follows:

In the first place we see, how the numerator is greater than the denominator, so that one or more whole numbers are contained in this fraction, whereby before all else, to be sought carefully, how many whole numbers are present, as we then have a clearer idea of the value held by the same, as when the whole numbers are combined with a fraction. Now in order to find this, according to the sixth proposition, we have to divide the numerator by the denominator as follows:

$$\begin{array}{r} 1740)\ 9222\ (5 \\ \underline{8700} \\ 522 \end{array}$$

Thus we see at once, that the above fraction is brought into this form $5\frac{522}{1740}$, which already is easier to understand than the proposed. Further we have to see, whether the fraction may not be expressed through smaller numbers, which is done, if we seek the greatest common divisor of the numerator and the denominator, in such a form:

$$\begin{array}{l} 522)\ 1740\ (3 \\ \quad\ \ \underline{1566} \\ \qquad 174)\ 522\ (3 \\ \qquad\qquad\ \underline{522} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Therefore 174 is the greatest common divisor; if we now cancel the fraction found by that $\frac{522}{1740}$, thus we arrive at this fraction $\frac{3}{10}$. In this way the fraction given in the beginning $\frac{9222}{1740}$ is equal to $5\frac{3}{10}$, that is, just as much as five whole numbers and three tenth parts of a whole.

But we can also at once search for the greatest common denominator of the numerator and denominator of the given fraction, thus:

```
1740) 9222 (5
      8700
       522) 1740 (3
            1566
             174) 522 (3
                  522
                    0
```

Now while 174 is the greatest common divisor, thus by the division of the given fraction brought into this form $\frac{53}{10}$, so that $\frac{53}{10}$ is just as much as $\frac{9222}{1740}$. But since the fraction $\frac{53}{10}$ is more than 1, thus the same becomes, if we actually divide the numerator by the denominator, to be transformed into this form $5\frac{3}{10}$ as before.

IV. Let us be given this fraction $\frac{1640}{1776}$, in order to bring it into the smallest possible form.

Therefore we seek the greatest common denominator of both the numbers 1640 and 1776.

```
1640) 1776 (1
      1640
       136) 1640 (12
            136
             280
             272
               8) 136 (17
                  8
                   56
                   56
                    0
```

While now 8 is the greatest common divider, thus by that the above fraction can be expressed by the following smaller numbers $\frac{205}{222}$, which fraction is as much as the given and at the same time composed from the smallest possible numbers.

CAPITEL 6

VON DEN BRÜCHEN UND DER NATUR DERSELBEN ÜBERHAUPT

1. *Wann in der Division der Divisor und der Dividendus so beschaffen sind, dass die Operation ohne Rest nicht vollzogen werden kann, so wird der Quotient, welcher anzeigt, wie viel mal der Divisor in dem Dividendo enthalten ist, ein Bruch genannt.*

Wir haben schon in dem vorigen Capitel bei Nr. 3 angemerket, dass nicht bei einer jeglichen Division der gesuchte Quotus accurat in ganzen Zahlen könne angezeiget werden, da wir uns dann begnügen mussten, die nächste kleinere Zahl dar für anzunehmen, und dabei den Rest anzu merken. In diesen Fällen ist demnach der daselbst gefundene Quotus nicht der wahre Quotus; sondern dazu muss noch der herauskommende Rest in Betrachtung gezogen werden, um einen hinlänglichen Begriff zu haben, wie viel mal der Divisor in dem Dividendo enthalten sei. Als wann 17 durch 5 getheilet werden soll, so finden wir durch die daselbst gegebenen Regeln, dass der Quotus 3, und dazu noche in Rest, nämlich 2, sei. Hieraus erhellet, dass 5 in 17 mehr als 3 mal enthalten, und folglich der wahre Quotus grösser als 3 sein müsse. Dann da 5 in 15 drei mal enthalten ist, so muss 5 in 17 nothwendig mehr als 3 mal begriffen sein. Dennoch aber ist 5 in 17 auch nicht gar 4 mal enthalten, weilen 20 diejenige Zahl ist, welche 5 vier mal in sich begreift. Aus diesem folget also, dass der wahre Quotus, welcher anzeigen soll, wie viel mal 5 in 17 enthalten sei, grösser als 3 und doch kleiner als 4 sein müsse. Da sich nun zwischen 3 und 4 keine ganze Zahl befindet, so kann auch dieser Quotus keine ganze Zahl sein; unterdessen aber ist derselbe doch eine Grösse oder Zahl, indem man sagen kann, dass derselbe Quotus grösser als 3 und kleiner als 4 sei. Diese Art von Zahlen nun, welche keine ganze Zahlen sind, werden Brüche oder gebrochene Zahlen genennt. Der wahre Quotus also, welcher anzeigt, wie viel mal 5 in 17 enthalten sei, ist folglich ein Bruch, das ist keine ganze Zahl; und von diesem Bruch erhalten wir zugleich aus diesem seinem Ursprung einen deutlichen Begriff, indem derselbe eine Zahl ist, welche anzeigt, wie viel mal 5 in 17 enthalten ist.

2. *Ein Bruch oder gebrochene Zahl, das ist der wahre Quotus, welcher aus einer Division, da der Divisor in dem Dividendo nicht just etliche mal enthalten ist, entspringt, pflegt also geschrieben zu werden: Man schreibet den Divisor unterden Dividendum, und zieht da zwischen eine Linie. Ein Bruch also auf diese Art geschrieben deutet an, wie viel mal die unter der Linie stehende Zahl in der darüber stehenden enthalten sei.*

Da wir schon einen kleinen Begriff von einem Bruche erlanget, indem derselbe eine Zahl ist, welche anzeiget, wie viel mal eine gegebene Zahl in einer anderen enthalten sei, so wird erfordert, dass wir einen solchen Brauch auf eine bequeme Art auszudrücken suchen. Weilen nun bei einem Bruch nach seinem Ursprung zwei Zahlen in Betrachtung kommen, nämlich der Dividendus und der Divisor, massen der Bruch den Quotum anzeigt, welcher aus einer solchen Division entspringt, so müssen auch in der Schreib-Art, dadurch der Bruch ausgedrückt wird, diese beiden Zahlen vorkommen. Dieses geschieht nun sehr bequem auf die angeführte Art, da der Dividendus über den Divisor gesetzet und eine Linie dazwischen gezogen wird. Dann auf diese Weise erkennt man zugleich den Ursprung und Werth eines Bruches, indem auf diese Art der Quotus angedeutet wird, welcher herauskommt, wann man die obere Zahl durch die untere dividirt. In dem vorher gegebenen Exempel, da 17 durch 5 sollte dividirt werden, wird also der Quotus, welcher ein Bruch ist, au diese Art angezeiget $\frac{17}{5}$ Durch diese Schreib-Art wird demnach ein Bruch ausgedrücket, und dar aus erkennt man zugleich, was dasselbe für ein Bruch sei ; nämlich $\frac{17}{5}$ ist ein Bruch und deutet an, wie viel mal 5 in 17 enthalten sei, oder dieser Bruch ist der wahre Quotus, der herauskommt, wann man 17 durch 5 dividirt. Gleichergestalt wann 8 durch 7 getheilet werden soll, so ist der Quotus keine ganze Zahl, sondern ein Bruch und wird also geschrieben $\frac{8}{7}$.Und durch diese Schreib-Art $\frac{5}{3}$ wird der Quotus angedeutet, welcher herauskommt, wann man 5 durch 3 dividirt.

3. *Um einen Bruch mit den ganzen Zahlen besser zu vergleichen, so ist zu merken, dass, wann die Unität oder ein ganzes in so viel gleiche Theile zertheilet wird, als die unter der Linie stehende Zahl ausweist, alsdann der Bruch so viel dergleichen Theile enthalte, als die obere Zahl anzeigt.*

Diese Art, sich einen Begriff von dem Werth eines Bruchs zu machen, scheinet zwar von der vorigen unterschieden zu sein, kommt aber in der That mit derselben sehr genau überein. Wann nämlich dieser Bruch $\frac{7}{4}$vorgegeben ist, so deutet derselbe nach der ersten Art den Quotum an, welcher herauskommt, wann man 7 durch 4 dividirt. Nach dieser Art aber sagen wir, dass, wann ein ganzes in 4 gleiche Theile getheilet wird, der Bruch 7 dergleichen Theile andeute und in sich begreife. Die Übereinstimmung aber dieser zwei verschiedenen Arten, den Werth eines Bruchs zu beschreiben, kann auf diese Weise gewiesen werden. Da $\frac{7}{4}$ den Quotum andeutet, der herauskommt, wann man 7 durch 4 dividirt, so wird dadurch der vierte Theil von 7 angezeiget, dann 7 durch 4 dividiren ist nichts anders als den vierten Theil von 7 finden.Woraus erhellet, dass ein jeglicher Bruch nichts anders bedeute, als den so vielten Theil der obstehenden Zahl, als die untenstehende ausweiset, welches wieder eine neue Art ist, sich den Werth eines Bruchs vorzustellen. Weilen nun, um bei dem gegebenen Exempel von $\frac{7}{4}$ zu bleiben, 7 sieben mal grösserist als 1, so muss folglich auch der vierte Theil von 7 sieben mal grösser sein als der vierte Theil von 1. Wann demnach 1 in 4 gleiche Theile getheilet wird, so ist einer derselben der vierte Teil von 1, und also $\frac{7}{4}$ sieben mal grösser als ein solcher Theil. Woraus folget, dass dieser Bruch $\frac{7}{4}$ sieben dergleichen Theile an deute, derer 4 ein ganzes oder eine Unität ausmachen. Aus diesem Exempel ist nun leicht zu begreifen, dass ein jeglicher Bruch, wann man die Unität oder ein ganzes in so viel gleiche Theile eintheilet, als die untere Zahl anzeiget, solcher Theile so viel in sich begreife, als die obere Zahl anzeiget. Und hieraus versteht man zugleich, dass diese Art mit der vorigen auf das genaueste übereinstimme.

4. *Wann ein Bruch auf vorbesagte Art geschrieben ist, so wird die über der Linie stehende Zahl der Zähler, die untere aber der Nenner genannt. Ein jeder Bruch aber wird also ausgesprochen: erstlich nennt man den Zähler und darauf den Nenner mit Hinzusetzung des Worts Theil. Als dieser Bruch* $\frac{5}{12}$ *wird ausgesprochen: fünf zwölfte Theil.*

Nach dem Ursprung der Brüche aus der Division ist die obere Zahl der Dividendus, die untere aber der Divisor. Die jetzt gegebene Benennung aber hat ihren Grund in der eben vorher angezeigten Eigenschaft der Brüche, da ein jeder Bruch, wann die Unität oder ein ganzes in so viel gleiche Theile getheilet wird, als die untere Zahl anzeiget, dergleichen Theile so viel in sich begreift, als die obere Zahl ausweist. Dann da die obere Zahl die Anzahl solcher Theile angibt, so wird dieselbe daber füglich der Zähler genannt. Die untere Zahl heisst aber deswegen der Nenner, weil dieselbe die Art dieser Theile benennet, indem sie anzeigt, wieviel dergleichen Theile ein ganzes ausmachen. Also ist in diesem Bruch $\frac{7}{10}$ die obere Zahl 7 der Zähler, die untere Zahl 10 aber der Nenner. Und da man sich den Inhalt also vorstellt, dass, wann die Unität oder ein ganzes in zehen gleiche Theile getheilet würde, derselbe 7 dergleichen Theile in sich enthalte, so kann derselbe also füglich mit Worten ausgesprochen werden: sieben zehente Theile eines ganzen. Dann weilen man sich hier die Unität in zehen gleiche Theile getheilet vorstellt, so ist ein solcher Theil der zehnte Theil eines ganzen, und sieben dergleichen, so viel nämlich der Bruch $\frac{7}{10}$ begreift, sind sieben zehnte Theile eines ganzen. Der letzte Zusatz aber eines ganzen, weilen derselbe bei allen Brüchen vorkommt, pflegt gemeiniglich der Kürze halben ausgelassen zu werden, so dass dieser Bruch $\frac{7}{10}$ nur sieben zehnte Theil genannt wird. Gleichergestalt heisst dieser Bruch $\frac{15}{28}$ fünfzehn achtundzwanzigste Theil, und dieser $\frac{3}{4}$ drei vierte Theil. Ist der Zähler 1, so deutet ein solcher Bruch einen solchen Theil an, dergleichen so viel, als der Nenner anzeiget, ein ganzes ausmachen. Demnach heisst dieser Bruch $\frac{1}{3}$ ein dritter Theil, oder, welches gleich viel, ein Drittel; also heisst $\frac{1}{4}$ ein Viertel, $\frac{1}{5}$ ein Fünftel, und so fort. Ist aber der Nenner 2, so wird anstatt zweite Theil oder Zweitel gesagt halbe, als $\frac{1}{2}$ heisst ein halbes, $\frac{3}{2}$ drei halbe, und so fort. Hieraus lässt sich nun sowohl die Schreib-Art als Benennung der Brüche leicht verstehen; zu Erkennung des Werths oder wahren Inhalts der Brüche aber wird ausser dem, was schon allbereits ist angebracht worden, folgendes dienen.

5. *Ist in einem Bruch der Zähler kleiner als der Nenner, so ist auch der Bruch selber kleiner als ein ganzes oder als 1. Ist aber der Zähler grösser als der Nenner, so ist auch der Inhalt des Bruchs grösser als 1. Ein Bruch aber, da der Zähler dem Nenner gleich ist, hält just ein ganzes.*

Die Wahrheit dieses, was hier ist vorgebracht worden, lässt sich aus den beiden Arten, nach denen wir uns die Brüche vorgestellt, leicht erweisen. Dann da nach der ersten Art ein Bruch den wahren Quotum anzeiget, welcher herauskommt, wann man die obere Zahl durch die untere dividirt, so ist klar, dass wann die obere Zahl kleiner ist als die untere, diese in jener nicht ein mal, sondern weniger mal darinnen enthalten sei; weswegen in solchem Fall der Quotus, das ist der Inhalt des Bruchs, kleiner als 1 sein muss. Als $\frac{3}{7}$ deutet den Quotum an, welcher herauskommt, wann man 3 durch 7 dividirt. Nun aber ist 7 in drei nicht ein mal enthalten, dann 1 mal 7 macht 7, das ist mehr als 3; dennoch aber ist 7 in 3 mehr als kein mal oder 0 mal enthalten, dann 0 mal 7 macht 0, das ist weniger als 3. Hieraus folget also, dass dieser Bruch $\frac{3}{7}$ oder der wahre Quotus, so herauskommt, wann 3 durch 7 dividirt wird, kleiner sei als 1, und doch grösser als nichts. Auf gleiche Weise sieht man, dass, wann die obere Zahl grösser ist als die untere, als dann diese in jener mehr als ein mal enthalten und folglich der Inhalt des Bruches grösser als 1 sein müsse. Also ist $\frac{7}{5}$ grösser als 1, dann wann ich 7 durch 5 dividire, so kommt in Quotum 1 und bleibt noch 2 über, weswegen der wahre Quotus, das ist der Werth des Bruchs $\frac{7}{5}$, grösser sein muss als 1. Ingleichem gibt es auch Brüche, welche grösser sind als 2, 3, 4, und so fort; als $\frac{15}{4}$ ist grösser als 3, und $\frac{30}{7}$ grösser als 4, wie aus der Division erhellet. Dass aber ein Bruch, in welchem der Zähler dem Nenner gleich ist, just 1 ausmache, lässt sich hieraus auch leicht ersehen. Dann da die obere Zahl der unteren gleich ist, so ist diese in jener just ein mal enthalten, und also der wahre Quotus 1. Nämlich $\frac{4}{4}$ ist so viel als 1, dann $\frac{4}{4}$ ist der Quotus, so herauskommt, wann man 4 durch 4 dividirt; dieser Quotus aber ist 1 ohne Rest, und also ist $\frac{4}{4}$ so viel als 1. Gleichermassen gibt es auch Brüche, welche 2, 3, oder eine andere ganze Zahl ausmachen; also ist $\frac{6}{3}$ so viel als 2, $\frac{12}{4}$ so viel als 3. Dergleichen Brüche aber sind eigentlich keine Brüche, indem ihr Werth durch ganze Zahlen angegeben werden kann. Weilen aber doch die Schreib-Art die Gestalt eines Bruchs hat, so werden solche Brüche Schein Brüche oder scheinbare Brüche genennet, und werden in der Brüche-Rechnung auch gebraucht. Solche Schein-Brüche sind alle diejenige, deren Nenner 1 ist; dann da eine jegliche Zahl durch 1 dividirt selbst wieder herauskommt, so trägt ein solcher Bruch eben so viel aus, als sein Zähler anzeiget. Nämlich $\frac{7}{1}$ ist 7, und $\frac{13}{1}$ ist 13. Auf diese Art kann also eine jede ganze Zahl in die Gestalt eines Bruchs gebracht werden, welches in der Bruch-Rechnung öfters nöthig ist. Alles dieses aber, was wir aus unserem ersten Begriff der Brüche hergeleitet, folget gleichermassen auch aus dem anderen und noch leichter. Dann da man ein ganzes in so viel Theile theilt, als der Nenner eines Bruchs anzeiget, und der Bruch selbst alsdann dergleichen Theile so viel enthält, als der Zähler anweist, so ist klar, dass, wann der Zähler dem Nenner gieich ist, alsdann der Bruch eben so viel Theile enthalte, als ein ganzes ausmachen, und folglich selbst ein ganzes betrage. Und weilen ferner ein ganzes so viel Theile hält, als der Nenner ausweist, so muss ein Bruch, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner, kleiner als 1, und ein Bruch, dessen Zähler grösser ist als der Nenner, grösser als 1 sein. Dann in jenem Fall sind weniger Theile, in diesem aber mehr enthalten, als zu einem ganzen erfordert werden.

6. *Ein Bruch, welcher grösser ist als 1, oder in welchem der Zähler grösser ist als der Nenner, kann folgendergestalt in zwei Glieder zerleget werden, davon eines eine ganze Zahl, das andere aber ein Bruch ist, welcher kleiner als ein ganzes. Nämlich man dividirt den Zähler durch den Nenner auf die in der Division beschriebene Art, und da gibt der Quotus das eine Glied, nämlich die ganze Zahl, der Rest aber gibt für das zweite, gebrochene Glied den Zähler, wozu der vorige Nenner genommen wird.*

Um den Inhalt dieses Satzes deutlicher zu machen, so sei gegeben dieser Bruch $\frac{20}{3}$ welcher grösser ist als 1, weilen der Zähler grösser ist als der Nenner. Nun um zu wissen, wie viel ganze in diesem Bruch enthalten sind, und ausser denselben was für ein Bruch, so dividirt man den Zähler 20 durch den Nenner 3; da dann in Quotum 6 ganze kommen und noch 2 für den Rest zurückbleiben. Dieser Rest 2 giebt nun den Zähler des Bruchs, dessen Nenner ist 3, nämlich $\frac{2}{3}$. Hierauf sagt man, dass der vorgelegte Bruch $\frac{20}{3}$ so viel sei als 6 ganze nebst $\frac{2}{3}$, welche ganze Zahl nebst dem Bruch also geschrieben zu werden pflegt $6\frac{2}{3}$ da der Bruch hinter die ganze Zahl gesetzt wird, und heisst eine solche Ausdrückung eine ganze Zahl nebst einem Bruch. Also ist $\frac{20}{3}$ eben so viel als $6\frac{2}{3}$ gleichergestalt ist $\frac{33}{7}$ so viel als $4\frac{5}{7}$ und $\frac{51}{11}$ so viel als $4\frac{7}{11}$. Dann wann man 33 durch 7 dividirt, so kommen in Quotum 4 ganze, und in Rest 5, woraus der angehängte Bruch $\frac{5}{7}$ entstehet. Dividirt man aber 51 durch 11, so kommen in Quotum 4 ganze und restiren noch 7, daber der Bruch $\frac{7}{11}$ entspringet. Auf diese Art erkennt man also gleich, wie viel ganze in einem Bruche enthalten sind, und was für ein Bruch noch ausser denselben dazu gehöre. Man findet nämlich eine ganze Zahl nebst einem Bruche, welche zusammen eben so viel ausmachen, als der vorgelegte Bruch. Durch diese Operation erhält man also einen deutlichern Begriff von einem Bruch, indem man erkennet, wie viel derselbe ganze und nebst denselben noch was für einen Bruch in sich begreife. Es ist aber klar, dass dieser angehängte Bruch allezeit kleiner sein [muss] als ein ganzes, dann sein Zähler ist deraus der Division entsprungene Rest, welcher allezeit kleiner ist als der Theiler, so zum Nenner gemacht wird. Diesemnach wird die Erkenntnis eines jeglichen Bruches, so grösser ist als ein ganzes, auf die Erkenntnis eines Bruches, der kleiner ist als 1, gebracht, so dass, wer sich einen deutlichen Begriff von Brüchen, die kleiner sind als 1, zuwegen gebracht hat, derselbe zugleich vonallen anderen Brüchen einen deutlichen Begriff erhält. Also wer weiss, was $\frac{1}{3}$ ist, derselbe weiss zugleich, was bedeutet $\frac{10}{3}$, indem $\frac{10}{3}$ so viel ist als $3\frac{1}{3}$, das ist 3 ganze nebst $\frac{1}{3}$. Dieses dienet nun zur Erläuterung und Gebrauch der gegebenen Regel; der Grund davon aber weiset sich leicht aus der Natur der Brüche. Dann da der Inhalt eines jeglichen Bruchs nichts anders ist als der wahre Quotus, so herauskommt, wann man die obere Zahl, das ist den Zähler, durch die untere oder den Nenner dividirt, so kann dieser Inhalt durch die wirkliche Division gefunden werden. Durch die Division findet man aber erstlich eine ganze Zahl in den Quotum, welche aber nicht den völligen und wahren Quotum ausmacht, wann noch ein Rest vorhanden ist. Dann um den völligen Quotum zu bekommen, so müsste noch der Rest durch den Divisor dividirt, und was herauskommt zu dem gefundenen Quoto gesetzt werden. Diese Division des Rests nun durch den Divisorern geschieht vermittelst eines Bruchs, da der Rest zum Zähler, der Theiler aber zum Nenner genommen wird. In solchem Fall ist also der wahre Quotus nichts anders als der gefundene Quotus in ganzen Zahlen nebst dem Bruch, dessen Zähler der Rest, der Nenner aber der Theiler oder des vorigen Bruchs Nenner selbst ist. Da also ein jeder Bruch nichts anders ist, als der völlige Quotus, der herauskommt, wann man den Zähler durch den Nenner dividirt, so ist derselbe auch gleich dem auf beschriebene Art durch die Division gefundenen völligen Quoto; nämlich der durch die Division für den Quotum gefundenen ganzen Zahl, nebst dem Bruch, dessen Zähler der zurückgebliebene Rest, der Nenner aber eben des vorigen Bruchs Nenner ist. Dieses ist demnach der Grund der gegebenen Regul, durch welche man einen Bruch, der grösser ist als 1, in eine ganze Zahl nebst einem Bruch verwandelt.

7. *Eine ganze Zahl nebst einem Bruch wird in einen einzelen Bruch verwandelt, wann man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt und zum Product den Zähler des Bruchs addirt, da dann diese Summe den Zähler des gesuchten einzelen Bruchs, der vorige Nenner aber den Nenner abgibt.*

Diese Operation ist nichts anders als eine Verkehrung der vorigen, dann vorher haben wir gelehret, einen Bruch, der grösser ist als ein ganzes, in eine ganze Zahl nebst einem Bruche verwandeln. Hier aber ist die Operation umgekehrt, und wird gelehret, wie man eine ganze Zahl nebst einem Bruche wiederum in einen einzelen Bruch verwandeln soll. Beide Operationen haben ihren grossen Nutzen; denn durch die erste erhält man, wie schon gemeldt, einen deutlichern Begriff von dem Inhalt oder Werth eines Bruchs, die andere aber ist in denen folgenden Operationen mit den Brüchen höchst nöthig, da, um dieselben zu bewerkstelligen, gemeiniglich eine ganze Zahl nebst angehängtem Bruche in einen einzelen Bruch verwandelt werden muss. Die gegebene Regel verhält sich nun also: es sei gegeben $7\frac{2}{3}$, nämlich eine ganze Zahl 7 nebst dem Bruch $\frac{2}{3}$, woraus ein einzeler Bruch gemacht werden soll. Man multiplicirt also 7 mit 3, und zum Product 21 thut man 2, so bekommtman 23 für den Zähler des gesuchten Bruchs, dessen Nenner ist 3, nämlich $\frac{23}{3}$. Dass nun dieser Bruch $\frac{23}{3}$ eben so viel sei als $7\frac{2}{3}$, erhellet aus dem vorigen Satz, dadurch $\frac{23}{3}$ in $7\frac{2}{3}$ verwandelt wird. Der Grund selbst aber von dieser Verwandlung ist dieser: Eine jede Zahl nebst angehängtem Bruche kann angesehen werden als ein aus der Division entsprungener wahrer Quotus, da der Nenner des angehängten Bruchs der Divisor, die ganze Zahl der Quotus in ganzen Zahlen, wie derselbe in der Division ist gefunden worden, der Zähler des Bruchs aber der Rest ist. In dieser Division fragt sich also der Dividendus, welcher, so er bekannt ist, sogleich einen einzelen Bruch dargibt, dadurch der wahre Quotus, das ist die vorgegebene ganze Zahl nebst dem angehängten Bruch, ausgedrücket wird; nämlich der Dividendus gibt den Zähler, der Divisor aber den Nenner dieses gesuchten Bruchs. Aus dem Divisore aber, Quoto und Rest wird der Dividendus gefunden, wann man den Quotum mit dem Divisore multiplicirt und dazu den Rest setzt. Weilen nun der Dividendus den Zähler des gesuchten Bruchs gibt, so wird derselbe gefunden, wann man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt und zum Product den Zähler hinzusetzt. Der Nenner aber dieses Bruchs ist der Divisor, das ist der Nenner des angehängten Bruchs selbst. Dieses beruhet alles auf der Natur der

Division und demjenigen, was im vorigen Satz von Findung des wahren Quoti aus dem Rest ist angebracht worden. Nach dieser Regel erkennt man also, dass $2\frac{1}{3}$ so viel ist als dann 2 mal 3 macht 6 und 1 dazu gibt 7 für den Zähler des einzelen Bruchs, dessen Nenner wie vor 3 ist Gleichergestalt ist $5\frac{3}{4}$ so viel als $\frac{23}{4}$ dann 4 mal 5 ist 20 und 3 dazu gibt 23. Also ist $128\frac{173}{320}$ so viel als $\frac{41133}{320}$, wie aus beigefügter Operation zu sein.

$$\left.\begin{array}{rl} 128 & \\ \underline{320} & \text{der Nenner} \\ 2560 & \\ 384 & \\ \underline{173} & \\ 41133 & \text{der Zähler} \end{array}\right\}\text{des gesuchten Bruchs.}$$

8. *Ein Bruch bleibt seinem Werth nach unverändert, wann man sowohl den Nenner als den Zähler durch eine beliebige Zahl multiplicirt. Und gleichergestalt behält auch ein Bruch seinen vorigen Werth, wann man beides, den Zähler und Nenner, durch eine beliebige Zahl dividirt. Woraus also erhellet, dass ein jeglicher Bruch, ohne seinen Werth zu veränderen, auf unendlich vielerlei Arten vorgestellet werden könne.*

Diesen Satz zu erklären, so lasst uns diesen Bruch $\frac{2}{3}$ zum Exempel dienen; wann desselben Zähler und Nenner mit 2 multiplicirt wird, so kommt dieser Bruch heraus $\frac{4}{6}$, welcher dem Inhalt nach dem vorigen Bruch $\frac{2}{3}$ vollkommen gleich ist. Wann nun ferner eben dieses Bruchs $\frac{2}{3}$ Zähler und Nenner durch 3 multiplicirt wird, so hat man $\frac{6}{9}$, welcher wiederum so viel ist als $\frac{2}{3}$. Wann man also fortfährt, durch 4, 5, 6 und so fort zu multipliciren, so kommen folgende Brüche heraus $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{18}$, und so weiter fort, welche alle eben so viel halten als Gleichergestalt sind auch alle folgenden Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$ und so fort ein ander gleich, und ist ein jeglicher davon so viel als ein halbes.

Es kann also eben derselbige Bruch auf unendlich vielerlei Arten vorgestellet werden, indem, wenn sowohl der Zähler als Nenner durch eine jegliche Zahl multiplicirt wird, ein Bruch herauskommt, der dem vorigen gleich ist. Auf diese Weise aber, nämlich durch das multipliciren, erhält man allzeit Brüche, welche aus grösseren Zahlen bestehen als der vorgelegte. Es ist aber klar, dass man hinwiederum aus diesen aus grossen Zahlen bestehenden Brüchen diejenigen müsse finden können, welche aus kleineren Zahlen bestehen, und aus welchen jene durch die Multiplication entstanden sind. Dieses geschieht nun durch die Division, da beides, der Nenner und Zähler, durch eine beliebige Zahl dividirt wird, wann nämlich die Division angeht. Dann gleich wie aus diesem Bruch $\frac{3}{5}$, wenn oben und unten durch 7 multiplicirt wird, dieser $\frac{21}{35}$ entspringt, so erhält man hinwiederum aus diesem Bruche $\frac{21}{35}$ den vorigen $\frac{3}{5}$ wann man beides, den Nenner und

Zähler, durch 7 dividirt. Aus diesen zweierlei Arten, einen Bruch in andere Formen zu verwandeln, sieht man nun, dass man Brüche angeben könne, welche sowohl aus grösseren als kleineren Zahlen, als ein vorgegebener Bruch ist, bestehen, und demselben dennoch dem Werth nach gleich sind; deren jenes vermittelst der Multiplication, dieses aber durch die Division geschieht. Hiebei aber ist zum voraus zu erinnern, dass man diese beiden Operationen der Multiplication und Division nicht mit der eigentlichen Multiplication und Division der Brüche confundire;dann auf die jetzt beschriebene Art wird ein Bruch nur in eine andere Gestalt gebracht, ohne seinen Werth zu veränderen. Wann aber ein Bruch entweder multiplicirt oder dividirt werden soll, so suchet man einen Bruch, welcher entweder grösser oder kleiner sein soll als der vorgelegte; sodass diese Operationen, welche zu den Speciebus der Brüche gehören, von der hier beschriebenen Verwandlung gänzlich unterschieden sind. Um nun auf den Grund dieser Verwandlung, da ein Bruch in eine andere Form, ohne seinen Werth zu verändern, gebracht wird, zu kommen, so muss derselbe aus der Natur der Brüche selbst hergeleitet werden; wobei dann vor allen Dingen zu merken ist, dass ein Bruch nichts anders ist als der wahre Quotus, welcher herauskommt, wann man den Zähler durch den Nenner dividirt. Ein jeglicher Bruch zeiget demnach an, wieviel mal der Nenner im Zähler enthalten sei. Es ist aber klar, dass, so viel mal bei einem Bruche der Nenner im Zähler enthalten ist, eben so viel mal der doppelte Nenner im doppelten Zähler enthalten sei, und folglich auch eben so viel mal der halbe Nenner im halben Zähler; woraus dann erhellet, dass, wann man beides, den Nenner und Zähler eines Bruchs, durch 2 entweder multiplicirt oder dividirt, der hieraus entstehende Bruch eben so viel betrage als der vorgegebene. Gleich wie man nun leicht sieht, dass, was hier von der Zahl 2 gesagt worden, seine Richtigkeit hat; so lässt sich eben dasselbe von der Zahl 3, 4, und sogar von einer jeglichen Zahl begreifen. Hieraus folget nun der vorgebrachte Satz, dass ein Bruch an seinem Werth nichts verliere, wann gleich beides, der Zähler und Nenner, durch eine jegliche beliebige Zahl entweder multiplicirt oder dividirt werden. Zu fernerer Erläuterung dieser Operation durch die Multiplication können folgende Exempel dienen:

$$\tfrac{4}{7} \text{ ist so viel als } \tfrac{8}{14} \text{ oder } \tfrac{12}{21} \text{ oder } \tfrac{16}{28}.$$

Imgleichen $2\frac{1}{3}$ ist so viel als $2\frac{2}{6}$ oder $2\frac{3}{9}$, weilen $\frac{2}{6}$ und $\frac{3}{9}$ so viel sind als $\frac{1}{3}$ und die ganze Zahl 2 bei allen einerlei ist. Gleichergestalt ist 3 so viel als $\frac{6}{2}$, item als $\frac{9}{3}$, item als $\frac{12}{4}$ und so fort; dann 3 ist so viel als $\frac{3}{1}$, wann man nun oben und unten durch 2 oder 3 oder 4 multiplicirt, so kommenund heraus $\frac{6}{2}$, $\frac{9}{3}$ und $\frac{12}{4}$, welche Brüche folglich so viel sind als 3. Hieraus sieht man nun, dass man eine jegliche ganze Zahl in eine Bruchsform verwandeln kann von einem beliebigen Nenner; als wann man einen Bruch verlangte, der so viel ist als 5 und dessen Nenner 6 sein soll, so hat man $\frac{30}{6}$.

Um Exempel von dieser Operation durch die Division anzuführen, so muss man solche Bruche nehmen, deren Nenner und Zähler sich durch eine Zahl theilen lassen, welches nicht bei allen angeht. Dabero, obgleich die Multiplication bei allen Brüchen stattfindet, so kann doch die Division nur bei solchen angebracht werden, in welchen der Zähler und Nenner sich durch eine gemeine Zahl theilen lassen. Wann also ein Bruch nicht so beschaffen ist, so kann der selbe durch die Division in keine andere Form gebracht und folglich nicht durch kleinere Zahlen ausgedrücket werden. Ein solcher Bruch ist $\frac{8}{15}$, da keine Zahl zugleich 8 und 15 theilet, weswegen der Inhalt dieses Bruchs durch kleinere Zahlen nicht ausgedrücket werden kann. Dann obgleich 1 oder die Unität sowohl 8 als 15 theilet, so wird durch diese Division die Form des Bruchs nicht verändert. Wann aber dieser Bruch $\frac{36}{60}$ vorkommen sollte, so sieht man, dass beides, der Zähler und Nenner, sich durch 2 dividiren lasse, dadurch wird aber dieser Bruch in diesen $\frac{18}{30}$ verwandelt. In diesem Bruche $\frac{18}{30}$ aber lassen sich wiederum beide Zahlen durch 2 theilen, wodurch man diesen Bruch $\frac{9}{15}$ bekommt. Ferner lassen sich auch hier beide Zahlen wiederum durch 3 theilen, da dann herauskommt $\frac{3}{5}$, welcher Bruch folglich so viel ist als $\frac{36}{60}$, und aus diesem auf einmal hätte können herausgebracht werden, wann man gesehen hätte, dass sich beide Zahlen 36 und 60 durch 12 theilen lassen. Dann wann [man] den Zähler und Nenner dieses Bruchs $\frac{36}{60}$ durch 12 dividirt, so kommen $\frac{3}{5}$ heraus. Weilen nun bei dieser Operation, welche durch die Division geschieht, und dadurch ein Bruch in kleinere Zahlen gebracht wird, vor allen Dingen zu wissen nöthig ist, ob sich beide Zahlen eines Bruchs durch eine gemeine Zahl theilen lassen, und ferner, was dieser Theiler für eine Zahl ist, so wollen wir in folgenden Sätzen dazu Anleitung geben.

9. *Um einigermassen zu sehen, ob eine vorgegebene Zahl durch andere getheilet werden könne, hat man nachfolgende Regeln, welche bei der Verkleinerung der Brüche wohl in acht genommen zu werden verdienen.*

1. Durch 2 lassen sich alle diejenigen Zahlen theilen, deren letzte Figur nach der rechten Hand sich durch 2 theilen lässt.

2. Durch 4 lässt sich eine Zahl theilen, wann sich die zwei letzten Zahlen gegen der Rechten durch 4 theilen lassen.

3. Durch 8 lässt sich eine Zahl theilen, wann die drei letzten Zahlen gegender Rechten durch 8 getheilet werden können.

4. Durch 5 lässt sich eine Zahl theilen, wann die letzte Figur nach der Rechten entweder 5 ist oder 0.

5. Durch 10 lassen sich keine anderen Zahlen theilen, als deren letzte Figur nach der Rechten 0 ist.

6. Durch 3 lässt sich eine Zahl theilen, wann sich die Summe von allen Figuren, aus welchen die Zahl bestehet, durch 3 theilen lässt.

7. Durch 9 lässt sich eine Zahl theilen, wann sich gleichfalls die Summe aller Figuren durch 9 theilen lässt .

8. Durch 6 lassen sich alle diejenigen Zahlen theilen, welche zugleich durch 2 und durch 3 getheilet werden können.

Ob sich aber eine Zahl durch 7 theilen lasse oder nicht, kann nicht wohl eine kürzere und bequemmere Regel gegeben werden, als dass man die Sache durch die wirkliche Division versuche.

Der Grund dieser Regeln beruhet auf der angenommenen Art, alle Zahlen durch Unitäten, Decaden, Centenarios, Millenarios und so fort auszudrücken; weswegen zu mehrerer Erläuterung nicht undienlich sein wird, die Gewissheit derselben mit mehrerem auszuführen; insonderheit, da dieselben gemeiniglich ohne allen Beweisthum vorgetragen zu werden pflegen. Wir betrachten also eine jegliche Zahl aus so viel Theilen zusammengesetzt, als viel Figuren dieselbe besteht, so dass ein Theil die Unitäten, der zweite die Decades, der dritte die Centenarios und so fort enthält. Was nun die erste Regel betrifft, so ist zu betrachten, dass sich die Decades, Centenarii, Millenarii und so weiter alle durch 2 theilen lassen. Wann sich demnach auch die Unitäten durch 2 theilen lassen, so lässt sich auch die ganze Zahl durch 2 theilen; dieses aber geschieht, wann sich die letzte Figur nach der rechten Hand durch 2 theilen lässt, oder wann dieselbe ist entweder 0 oder 2, 4, 6, 8. Hierauf beruhen auch die 4 te und 5 te Regel; dann die Decades, Centenarii, Millenarii und folgende lassen sich für sich durch 5 und durch 10 theilen. Derowegen, wann auch die Unitäten durch 5 oder 10 getheilet werden können, so lässt sich auch die ganze Zahl dadurch theilen. Nun aber enthält die letzte Figur von der Rechtendie Unitäten; und folglich lässt sich eine Zahl durch 5 oder 10 theilen, wann sich die letzte Figur dadurch theilen lässt, das ist für den ersteren Fall, nämlich 5, wann die letzte Figur entweder 0 oder 5 ist, im anderen Fall für 10 aber, wann die letzte Figur 0 ist. Die zweite Regel zu beweisen, so ist zu merken, dass sich alle Centenarii, Millenarii und so fort durch 4 theilen lassen; wann sich demnach die Decades zusammt den Unitäten auch durch 4 theilen lassen, so wird die ganze Zahl durch 4 können getheilet werden. Die zwei letzteren Figuren aber nach der rechten Hand enthalten die Decades und Unitates, und folglich kommt die ganze Sache darauf an, ob sich diese zwei Zahlen, oder vielmehr die Zahl, welche dadurch angedeutet wird, durch 4 theilen lässt; also lässt sich 1736 durch 4 theilen, weil 36 dadurch getheilet werden kann. Eine gleiche Bewändnüs hat es auch mit der dritten Regel, dann weil sich 1000 durch 8 theilen lässt, so lassen sich auch alle Millenarii und folgende höhere Sorten durch 8 theilen. Derowegen, wann sich in einer Zahl die Centenarii, Decades und Unitäten insgesamt durch 8 theilen lassen, so wird auch die völlige Zahl durch 8 getheilet werden können; dieses aber geschieht, wann sich die Zahl, welche durch die drei letzten Figuren nach der Rechten angedeutet wird, durch 8 theilen lässt. Also lässt sich diese Zahl 13896 durch 8 theilen, weilen 896 dadurch getheilet werden kann. Der Beweis der 6 ten und 7 ten Regel hat mehr Schwierigkeit, dennoch aber kann derselbe auf folgende Art vorgebracht werden. Wann eine Anzahl Decaden oder Centenarii oder Millenarii oder höhere Sorten durch 3 oder 9 getheilet werden, so bleibt eben so viel über, als wann eine gleiche Anzahl Unitäten durch 3 oder 9 wäre getheilet worden; als wann 700 durch 3 oder 9 getheilet wird, so bleibt eben so viel über, als wann 7 allein dadurch getheilet würde. Wann also eine Zahl, so aus viel Figuren besteht, durch 3 oder 9 getheilet wird, so bleibt eben so viel über, als wann alle Figuren nur Unitäten bedeuteten, und alle zusammen genommen durch 3 oder 9 dividirt würden. Weilen sich nun eine Zahl durch eine andere theilen lässt, wann nichts überbleibt, so wird sich eine jegliche Zahl durch 3 oder 9 theilen lassen, wann sich die Summe aller Figuren dadurch theilen lässt. Also lässt sich 1737 durch 3 und 9 theilen, dann die Summe der Figuren macht 18, welche Zahl durch 3 und 9 getheilet werden kann. Bei grossen Zahlen, wann die Summe der Figuren selbst wieder gross wird, und aus etlichen Figuren besteht, so kann dieser Vortheil wieder angebracht, und die Summe dieser Figuren selbst untersuchet werden. Als wann gefragt würde, ob sich diese Zahl durch 3 oder 9 theilen lasse, so addire man alle Figuren zusammen, da dann 79 herauskommt; dieser Zahl Figuren zusammen machen nun ferner 16, und weil diese Zahl noch aus zwei Figuren besteht, so addire man dieselben nochmals zusammen, da dann 7 herauskommt. Woraus erhellet, dass, wann die vorgegebene Zahl durch 3 oder 9 dividirt werden sollte, eben so viel uberbleiben würde, als wann 7 dadurch getheilet würde, nämlich im erstern Fall 1, im letzten 7. Die 8te Regel folget aus der ersten und sechsten; dann wann sich eine Zahl in zwei und zugleich auch in drei gleiche Theile zertheilen lässt, so lässt sich dieselbe auch in 6 gleiche Theile theilen. Endlich ist zu merken, dass man durch alle diese Regeln nicht nur erkennt, ob sich eine Zahl durch eine solche vorgeschriebene theilen lasse oder nicht, sondern auch, wieviel im letzteren Fall übrig bleibe, wie aus dem letztangebrachten Exempel von 3 und 9 zu ersehen, obgleich dieses zu unserem jetzigen Vorhaben nicht dienet, in anderen Fällen aber dennoch von grossem Vortheil sein kann. Wann man nun diese Regeln wohl im Kopfe hat, so kann man öfters bei einem vorgegebenen Bruche gleich sehen, ob sich beides, der Zähler und Nenner, durch eine gemeine Zahl theilen lassen, und ob folglich der Bruch in einen anderen gleiches Werths, der aber aus kleineren Zahlen besteht, verwandelt werden könne. Dann zu Erkennung der Bruche tragt sehr viel bei, wann die Zahlen, dar aus derselbe besteht, so klein sind als möglich; und ist also die Verkleinerung der Brüche zu deutlicherem Begriff derselben höchst nützlich. Derowegen wird nicht undienlich sein, einige Exempel vorzubringen, in welchen Brüche vermittelst der gegebenen Regeln in leichtere verwandelt werden.

I. Es sei uns dieser Bruch $\frac{122}{356}$ vorgeleget, in welchem wir nach der ersten Regel sehen, dass sich beide Zahlen durch 2 theilen lassen, weilen die letzten Figuren derselben 2 und 6 dadurch getheilet werden können; wann wir derohalben den Zähler und Nenner durch 2 dividiren, so kommt dieser Bruch heraus $\frac{61}{178}$, welcher dem vorgelegten gleich ist.

II. Wenn dieser Bruch $\frac{368}{1032}$ vorkäme, so sähe man nach der zweiten Regel gleich, dass beide Zahlen sich durch 4 theilen lassen, weilen die zwei letzteren Figuren davon, nämlich 68 und 32, dadurch theilbar sind. Ja man kann hier sogar die dritte Regel anbringen und sehen, dass sich beide Zahlen durch 8 theilen lassen, weilen die drei letzten Figuren, nämlich 368 und 032, das ist 32, durch 8 theilbar sind. Wann man demnach durch 8 dividirt, so wird der vorgelegte Bruch in diesen verwandelt. Hiebei aber ist zu erinnern, dass man nicht nöthig habe, sich viel Mühe für die 2te und 3te Regel zu geben, indem der Gebrauch der ersten beide in sich begreift; als im vorgegebenen Bruche $\frac{368}{1032}$ kann genug sein, wann man sieht, dass sich beide Zahlen durch 2 theilen lassen, wodurch also dieser Bruch $\frac{184}{516}$ herauskommt; bei welchem man sieht, dass beide Zahlen sich nochmals durch 2 theilen lassen, da man dann $\frac{92}{258}$ bekommt. Hier sieht man nun wiederum leicht, dass beide Zahlen noch durch 2 theilbar sind, durch welche Division der oben gefundene Bruch $\frac{46}{129}$ herauskommt.

III. Wann dieser Bruch vorkäme $\frac{7350}{8900}$, so sähe man nach der fünften Regel gleich, dass beide Zahlen durch 10 theilbar sind, weswegen nach verrichteter Division durch 10 dieser Bruch $\frac{735}{890}$ herauskommt. Bei diesem Bruche kann ferner die vierte Regel stattfinden, weilen die obere Zahl sich mit 5, die untere aber mit 0 endigt; daber beide durch 5 theilbar sind. Wann man nun beide Zahlen durch 5 dividirt, so bekommt man diesen Bruch $\frac{147}{178}$, welcher eben so viel hält als der vorgelegte. Hiebei ist nun zu merken, dass diejenigen Brüche, deren Nenner und Zähler sich durch 10 theilen lassen und folglich mit einer oder mehr Nullen sich endigen, am leichtesten zu kleineren Zahlen können gebracht werden, indem man nur nöthig hat, oben und unten eine oder zwei oder mehr Nullen abzuschneiden. Also ist $\frac{30}{50}$ so viel als $\frac{3}{5}$ und $\frac{120}{700}$ so viel als $\frac{12}{70}$ und $\frac{29000}{50000}$ so viel als $\frac{29}{50}$.

IV. Es sei uns dieser Bruch $\frac{4623}{10548}$ vorgegeben, durch kleinere Zahlen auszudrücken; weilen nun beide Zahlen zugleich weder durch 2 noch 5 noch 10 getheilet werden können, so wollen wir sehen, ob nicht beide durch 3 oder 9 theilbar sind, welches nach der sechsten und siebenten Regel geschieht, wann man die Figuren sowohl des Zählers als Nenners zusammen addirt. Des Zählers Figuren aber zusammen machen 15 und des Nenners 18, woraus erhellet, dass sich beide Zahlen durch 3 theilen lassen, daber dieser Bruch $\frac{1541}{3516}$ herauskommt. Ob aber diese Regeln gleich einen grossen Vortheil in Verkleinerung der Brüche haben, so kann man dennoch vermittelst derselben nur sehen, ob beide Zahlen durch 2, 3, 5 oder 10 theilbar sind, und folglich dadurch dergleichen Brüche nicht in kleinere Zahlen bringen, bei welchen diese Regeln nicht stattfinden. Derowegen ist nöthig, eine andere allgemeine Regel an die Hand zugeben, durch deren Mittel man allzeit diejenige Zahl finden kann, durch welche beide Zahlen, nämlich der Zähler und Nenner, getheilt werden können.

10. *Ein gemeiner Theiler von zweien Zahlen ist eine solche Zahl, dadurch sich beide Zahlen theilen lassen; und der grösste gemeine Theiler ist die grösste Zahl, durch welche sich beide Zahlen zugleich theilen lassen. Um aber von zweien gegebenen Zahlen den grössten gemeinen Theiler zu finden, hat man diese Regel: Man dividirt die grössere Zahl durch die kleinere, oder setzt die kleinere zum Divisore, die grössere aber zum Dividendo; hierauf dividirt man den Divisorem durch den übergebliebenen Rest, das ist, man macht nach der ersten Division die zweite, in welcher der gefundene Rest zum Divisor, der vorige Divisor aber zum Dividendo gesetzet wird; und also fähret man mit solchen Divisionen fort, indem man immer den Rest der vorigen Division zum Divisor der folgenden, und den Divisor der vorigen zum Dividendo der folgenden setzt, bis man zu einer Division kommt, welche ohne Rest absolvirt wird. Und da ist der Divisor dieser letzten Division der grösste gemeine Theiler der zwei vorgegebenen Zahlen.*

Wann hier und in vorigen Sätzen von Zahlen die Rede ist, so ists allzeit von ganzen Zahlen zu verstehen, obgleich die Brüche auch freilich mit unter die Zahlen gehören. Alle Zahlen sind nun theilbar durch 1, weilen alle durch1 ohne Rest getheilt werden können;

ferner ist auch eine jegliche Zahl durch sich selbst theilbar, und deswegen hat eine jegliche Zahl zum wenigsten zwei Theiler, nämlich die Unität und sich selbst. Ein Theiler aber einer Zahl ist eine solche Zahl, dadurch sich dieselbe Zahl ohne Rest theilen lässt, als 3 ist ein Theiler von 12, und 5 ein Theiler von 15. Hier kommt nun ein Haupt unterschied in den Zahlen zu merken vor; dann einige Zahlen sind so beschaffen, dass sie sich durch keine andere Zahlen ausser der Unität und sich selbst theilen lassen, welche also füglich untheilbare Zahlen genennet werden können; solche Zahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 und so weiter, als welche keine andere Theiler haben als die Unität und sich selbst.

Die übrigen Zahlen aber, welche sich ausser der Unität und sich selbst noch durch andere Zahlen theilen lassen, werden theilbare Zahlen genennt, dergleichen sind 4, 6, 8, 9, 10, 12 und so fort. Von solchen Zahlen sind insonderheit diejenigen zu merken, welche sich durch 2 theilen lassen und grade Zahlen genennt zu werden pflegen, als da sind 2, 4, 6, 8, 10, 12 und so fort, welche aus der ersten Regel des vorigen Satzes gleich erkennt werden. Da im Gegentheil diejenigen Zahlen, welche sich nicht durch 2 theilen lassen, ungrade Zahlen genennt werden, als da sind 3, 5, 7, 9, 11, 13 und dergleichen, zu welchen auch die Unität selbst mit gehöret. Da wir nun erklärt, was man durch einen Theiler einer Zahl versteht, so ist auch leicht zu begreifen, was ein gemeiner Theiler von zweien oder mehr Zahlen ist, nämlich eine solche Zahl, dadurch sich eine jede derselben Zahlen theilen lässt; also ist die Unität ein gemeiner Theiler aller Zahlen, aber eben deswegen von keinem Nutzen bei unserem Vorhaben, die Brüche in kleinere Zahlen zu bringen, weilen durch die Division mit der Unität die Zahlen unverändert bleiben. Zwei solche Zahlen nun, welche ausser der Unität noch einen oder mehr gemeine Theiler haben, werden unter sich theilbare Zahlen genennt, dergleichen sind 12 und 15, alswelche beide sich durch 3 theilen lassen; ingleichem 7 und 21, dann beide sind durch 7 theilbar. Solche Zahlen aber, welche ausser der Unität keinen gemeinen Theiler haben, werden unter sich untheilbare Zahlen genennt, solche sind 7 und 9; item 15 und 28. Wann derohalben ein Bruch so beschaffen ist, dass der Zähler und Nenner unter sich untheilbare Zahlen sind, so kann derselbe nicht durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden; dergleichen Brüche pflegen unaufhebliche Brüche genennt zu werden, weilen sie sich durch die Division nicht in kleinere Zahlen bringen lassen, welche Operation das Aufheben der Brüche genennt zu werden pflegt. Wann aber der Zähler und Nenner eines Bruchs unter sich theilbare Zahlen sind, so kann der Bruch durch den gemeinen Theiler aufgehoben, das ist durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden, weswegen auch solche Brüche aufhebliche Brüche genennt werden. Um nun die aufheblichen Brüche zu erkennen, und dieselben in kleinere Zahlen zu bringen, so haben wir die beschriebene Regel vorgebracht, vermittelst welcher man nicht nur von zweien gegebenen Zahlen einen gemeinen Theiler, wann sie nämlich unter sich theilbar sind, sondern sogar den grössten gemeinen Theiler finden kann. Dadurch erhält man aber diesen Vortheil, dass man so gleich alle aufheblichen Brüche durch den grössten gemeinen Theiler in die kleinsten möglichen Zahlen bringet und in unaufhebliche verwandelt, von welchen man versichert sein kann, dass sie alsdann durch keine kleinere Zahlen weiter ausgedrückt werden können. Die gegebene Regel nun, um den grössten gemeinen Theiler von zweien Zahlen zu finden, ist kurz und leicht bei allen Fällen anzuwenden; jedennoch aber wird nicht undienlich sein, ehe wir den Grund davon anzeigen, dieselbe durch etliche Exempel zu erläuteren.Es seien uns derohalben diese zwei Zahlen 1578 und 2904 vorgegeben, deren grössten gemeinen Theiler man zu wissen verlanget; man theile also 2904 durch 1578 wie folget:

$$\begin{array}{r}1578)\ 2904\ (1\\ \underline{1578}\\ 1326\end{array}$$

so findet man 1326 für den Rest; durch solchen dividirt man nach der Regel den vorigen Divisorern 1578, nämlich:

$$\begin{array}{r}1326)\ 1578\ (1\\ \underline{1326}\\ 252\end{array}$$

Ferner muss 1326 durch 252 dividirt werden:

$$\begin{array}{r}252)\ 1326\ (5\\ \underline{1260}\\ 66\end{array}$$

Weiter durch 66 dividire man 252:

$$\begin{array}{r}66)\ 252\ (3\\ \underline{198}\\ 54\end{array}$$

Nun ist 66 durch 54 zu dividiren:

$$\begin{array}{r}54)\ 66\ (1\\ \underline{54}\\ 12\end{array}$$

Jetzt muss 54 durch 12 dividirt werden:

$$\begin{array}{r}12)\ 54(4\\ \underline{48}\\ 6\end{array}$$

Endlich hat man 12 durch 6 zu theilen, welche Division, weilen sie ohne Rest aufgeht, anzeigt, dass 6 der grösste gemeine Theiler von den zwei vorgegebenen Zahlen ist. Wann also dieser Bruch $\frac{1578}{2904}$ wäre vorgelegt worden, so könnte man denselben durch 6 aufheben und in diesen Bruch $\frac{263}{484}$ verwandeln, welcher unaufheblich und nicht mehr durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden kann. Wann diese Zahlen 3735 und 4815 sollten sein vorgegeben worden, so würde die ganze Operation nach der gegebenen Regel folgendergestalt zustehen kommen:

3735) 4815 (1
3735
1080(3735 (3
3240
495) 1080(2
990
90)495(5
450
45) 90(2
90

Aus welcher Operation man sieht, dass 45 der grösste gemeine Theiler der vorgegebenen Zahlen ist.

Wären aber die Zahlen unter sich untheilbar, so weiset auch dasselbe diese Operation, da durch die Unität als der grösste gemeine Theiler gefunden wird, wie aus folgendem Exempel, da diese Zahlen 36 und 151 gegeben sind, zu ersehen:

36) 151 (4
144
7)36 (5
35
1)7 (7
7

Damit wir aber endlich auf den Grund dieser Operation kommen, so ist vor allen Dingen zu merken, dass, wann zwei Zahlen einen gemeinen Theiler haben, alsdenn auch die Differenz derselben Zahlen durch eben denselben Theiler getheilet werden könne ; ingleichem auch die Differenz zwischen der einen und dem doppelten oder dreifachen oder einem anderen vielfachen der anderen Zahl. Nun aber, wann die grössere Zahl durch die kleinere dividirt wird, so ist der Rest nichts anders als die Differenz zwischen der grösseren Zahl und einem multiplo der kleineren. Derohalben muss ein gemeiner Theiler zweier Zahlen auch den Rest theilen, welcher in der Division der grösseren Zahl durch die kleinere zurückbleibt. Solchergestalt wird ein jeder gemeiner Theiler der zwei gegebenen Zahlen zugleich ein gemeiner Theiler sein des Divisoris und des Rests. Auf gleiche Weise, wann der vorige Divisor durch den Rest getheilet wird, so wird wiederum ein jeder gemeiner Theiler der zwei Anfangs vorgegebenen Zahlen den Divisor und Rest dieser letzten Division theilen, und so weiter fort bei allen folgenden Divisionen. Wann man endlich also zu einer Division kommt, welche ohne Rest aufgeht, so haben auch der Dividendus und Divisor dieser letzten Division eben die gemeinen Theiler, welche die beiden Anfangs gegebenen Zahlen unter sich haben. Weilen aber diese letzte Division ohne Rest aufgeht, so ist der Divisor nicht nur ein gemeiner Theiler des Divisoris selbst und des Dividendi, sondern auch der grösste gemeine Theiler; woraus dann folgt, dass dieser letzte Divisor auch der grösste gemeine Theiler beider vorgegebenen Zahlen sein müsse. Dieses ist also der Grund der erklärten Regel, durch welche der grösste gemeine Theiler zweier Zahlen gefunden werden kann, davon der Nutzen in Verkleinerung oder Aufhebung der Brüche zwar schon einigermassen angeführt worden ist, dennoch aber zu grösserem Gebrauch im folgenden Satz ausgeführt werden soll.

11. *Um von einem vorgegebenen Bruche zu urtheilen, ob derselbe durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden könne oder nicht, so muss man von dem Zähler und Nenner desselben den grössten gemeinen Theüer suchen. Findet man nun 1 für den grössten gemeinen Theiler, so ist dasselbe ein Anzeigen, dass der Bruch durch kleinere Zahlen nicht ausgedrückt werden könne. Kommt aber ein anderer grösserer gemeiner Theiler heraus, so kann der vorgegebene Bruch in kleinere Zahlen gebracht werden, wann man nämlich den Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs durchden gefundenen grössten gemeinen Theiler dividirt, wobei noch dieses zu merken ist, dass der Bruch, welchen man auf diese Weise erhält, nicht weiter verkleinert oder aufgehoben werden könne, und dadurch folglich der vorgelegte Bruch in den kleinesten Zahlen ausgedrücket werde.*

Wir haben oben schon gesehen, dass ein jeglicher Bruch auf unendlich vielerlei Arten ausgedrückt werden könne, ohne den Inhalt davon zu änderen, welche Verwandlung der Brüche ihren unentbehrlichen Nutzen im folgenden Capitel haben wird. Allhier aber, da wir nur von der Natur der Brüche handeln, so ist ausser allem Zweifel, dass, je kleiner die Zahlen sind, da durch ein Bruch vorgestellet wird, je deutlicher und leichter man sich von dem Werthe des Bruchs einen Begriff formiren könne. Derowegen ist die hier gegebene Regel, durch welche man lernet, einen Bruch in den kleinsten möglichen Zahlen vorzustellen, von sehr grossem Nutzen; indem man durch Hilfe derselben einen Bruch entweder sicher in die kleinesten Zahlen bringen, oder wo eine solche Aufhebung nicht stattfindet, versichert sein kann, dass der vorgelegte Bruchun aufheblich sei, und durch kleinere Zahlen unmöglich vorgestellt werden könne. Diese Verwandlung in die leichteste Form geschieht nun durch die Ausfindung des grössten gemeinen Theilers der beiden Zahlen des Bruchs, nämlich des Zählers und Nenners, wozu im vorigen Satze genugsame Anleitung gegeben worden ist. Deswegen, wann man den grössten gemeinen Theiler des Zählers und Nenners gefunden, so wird dadurch der vorgegebene Bruch leicht in die kleinesten Zahlen gebracht, wann man nämlich nach dem achten Satze sowohl den Zähler als den Nenner durch diesen grössten gemeinen Theiler dividirt, da dann der heraus gebrachte Bruch dem vorigen dem Werthe nach gleich sein, dabei aber aus den kleinesten möglichen Zahlen bestehen, und folglich keine weitere Aufhebung leiden wird. Da nun diese Operationen schon zur Genüge ausgeführt worden sind, so ist nur noch übrig, zum Beschluss dieses Capitels einige Exempel beizufügen.

I. Es sei uns dieser Bruch $\frac{3080}{8547}$ vorgegeben, welcher wo möglich durch kleinere und das durch die aller kleinsten Zahlen ausgedrückt werden soll.

Man suche also vor allen Dingen den grössten gemeinen Theiler dieser beiden Zahlen 3080 und 8547, wie folget:

```
3080) 8547 (2
      6160
      2387( 3080 (1
            2387
             693) 2387 (3
                  2079
                   308) 693 (2
                        616
                         77) 308 (4
                             308
```

Woraus erhellet, dass 77 der grösste gemeine Theiler ist der beiden Zahlen, dar aus der Bruch besteht. Derowegen, dividirt man beides, den Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs, so wird dieser Bruch herauskommen $\frac{77}{111}$, welcher nicht weiter aufgehoben werden kann.

II. Einer hat 24 Solotnick Silber und möchte gerne wissen, den wievielten Theil er von einem Pfund habe.

Weilen ein Pfund 96 Solotnick hält, so hat diese Person $\frac{24}{96}$ das ist vierundzwanzig sechsundneunzigste Theil eines Pfunds; derowegen lauft die Frage dahin aus, dass man wo möglich diesen Bruch durch kleinere und das [durch] die aller kleinsten Zahlen ausdrücke. Man suche also den grössten gemeinen Theiler von 24 und 96, also

```
24) 96 (4
    96
     0
```

weswegen sich beide Zahlen durch 24 theilen lassen. Wann man nun den Bruch durch 24 aufhebt, so kommt dieser $\frac{1}{4}$ Bruch heraus, woraus man sieht, dass das vorgegebene Gewicht just ein viertel Pfund sei.

III. Wann man diesen Bruch $\frac{9222}{1740}$ gefunden hätte, und man wollte wissen, ob der Inhalt desselben nicht könnte auf eine kürzere Art ausgedrücket werden, so würde man also verfahren:

Erstlich sieht man, weil der Zähler grösser ist als der Nenner, dass in diesem Bruche ein oder etliche ganze enthalten sind, weswegen vor allen Dingen dienlich sein wird zu suchen, wieviel ganze vorhanden sind, weilen man alsdann schon einen deutlicheren Begriff von dem Werthe desselben erhält, als wann die ganzen mit im Bruche eingewickelt sind. Um nun dieses zu finden, so hat man nach dem sechsten Satz den Zähler durch den Nenner zu dividiren wie folgt:

```
1740) 9222 (5
      8700
       522
```

Also sieht man schon, dass der vorgegebene Bruch in diese Form $5\frac{522}{1740}$ gebracht werde, welche schon leichter zu begreifen ist als die vorgelegte. Ferner hat man zu sehen, ob der

Bruch nicht durch kleinere Zahlen ausgedrücket werden könne, welches geschieht, wann man den grössten gemeinen Theiler des Zählers und Nenners suchet, solchergestalt:

```
522) 1740 (3
     1566
      174) 522 (3
           522
             0
```

Demnach ist 174 der grösste gemeine Theiler; wann man nun den gefundenen Bruch $\frac{522}{1740}$ dadurch aufhebt, so bekommt man diesen $\frac{3}{10}$. Derowegen ist der im Anfang gegebene Bruch $\frac{9222}{1740}$ so viel als $5\frac{3}{10}$, das ist so viel als funf ganze und drei Zehntel eines ganzen.

Man kann aber auch gleich den grössten gemeinen Theiler des Zählers und Nenners des gegebenen Bruchs suchen, also:

```
1740) 9222 (5
      8700
       522) 1740 (3
            1566
             174) 522 (3
                  522
                    0
```

Weilen nun 174 der grösste gemeine Theiler ist, so wird durch die Division der gegebene Bruch in diese Form $\frac{53}{10}$ gebracht, so dass $\frac{53}{10}$ eben so viel ist als $\frac{9222}{1740}$. Da aber der Bruch $\frac{53}{10}$ mehr ist als 1, so wird derselbe, wann man den Zähler durch den Nenner wirklich dividirt, in diese Form $5\frac{3}{10}$ verwandelt wie vorher.

IV. Sei uns dieser Bruch $\frac{1640}{1776}$ gegeben, um in die kleinste mögliche Form zu bringen. Deswegen suche man den grössten gemeinen Theiler beider Zahlen 1640 und 1776.

```
1640) 1776 (1
      1640
       136) 1640 (12
            136
             280
             272
               8) 136 (17
                  8
                   56
                   56
                    0
```

Weilen nun 8 der grösste gemeine Theiler ist, so wird dadurch der vorgegebene Bruch durch folgende kleinere Zahlen ausgedrücket $\frac{205}{222}$, welcher Bruch so viel ist als der vorgegebene und zugleich aus den kleinsten möglichen Zahlen besteht.