

CHAPTER 2

ADDITION AS THE FIRST ARITHMETICAL OPERATION

1. *Such rules are to be given in addition, with the help of which one can find a number, which is just as great as two or more given numbers. This number, which is found by these rules, maintains what is to be called the sum of the given numbers.*

We have shown in the previous chapter that we do not have a clear idea of large numbers, if we do not know how they are composed of smaller numbers. As if we consider the number 1735, the idea therein thus consists of the same, since one knows, that the same number can be composed from a thousand, seven hundred, thirty and five, or to be the sum of these numbers. But it was supposed that we had a thorough understanding of these things, which was sufficient to be carried out in the previous chapter. For it is understood namely the identification of the numbers therein consists in knowing that there is some number of units, tens, hundreds, thousands, etc.; and according to these parts, both the manner of writing the numbers, and the words used in pronouncing them are established. Hence, if we want to form a definite concept of a given number, which is composed from the sum of two or more given numbers, thus we must enquire, the same to consist of how many units, tens, hundred, etc. Then if we have found these, then we are in a position, to understand how many numbers to write or to say in words. Now this operation will be called Addition, from which the sum of two or more given numbers which consist of so many such parts. And thus we obtain through the addition a thorough understanding of the sum of two or more given numbers, and learn both how to write the same as well as to say the same in words. As if the sum of these two numbers 247 and 328 were required, thus indeed the idea of these to be already understood quite well, now we know, that the same is equal to the two given numbers taken together. But we want to have complete knowledge about this sum, about how many units, tens, hundreds etc. the same contains, from which we can know the same according to the usual way of writing and saying the words. Now to accomplish this gives us a sure and easy rule at hand, the correctness and usage of which we are going to describe thoroughly and explicitly.

2. *For the addition of two or more numbers it will be required, that one may know the units, the tens, the hundreds, etc. to be added in particular. And there 10 units makes ten, 10 tens makes one hundred, 10 hundreds makes a thousand, and so forth, thus it is noted, when in the addition more than 9 of a kind arise, the same to be raised to a higher order, so that never more than 9 of a kind come to be considered.*

There the numbers, which must be collected together, consist of units, tens, hundreds and so forth ; so must the sum in itself be understood to be of just as many units, tens, hundreds and so on further, as the given numbers themselves hold altogether. Because on that account it is required to add two or more numbers taken together, that one must add each in particular, the units, tens, hundreds, etc. But there besides 0 no more than nine

characters shall be present, through which a known number whether of units, tens, hundreds, etc. can be indicated, thus no more than nine of any kind can be known to be observed by these characters. Because, if more than nine of any kind arise, so must so many of the next higher kind be formed as possible, until less than ten of each kind is observed. This confusion now occurs because of the relations between all these kinds, namely that 10 Units complete a ten, 10 tens a hundred, 10 hundreds a thousand, and so forth. Now, while our understanding of numbers are clear so far, as we understand how many parts of each kind remain the same, so does the thought of confusion about the same, as soon as one discerns the sums of different numbers of units, or tens, or hundreds, etc. . As if we know, that 8 and 9 together make seventeen, thus we know likewise, that 8 and 9 units together is just as much as one ten next to 7 units. Similarly 8 and 9 tens shall be as great as one hundred and 7 tens; and 8 and 9 hundreds as great as one thousand together with 7 hundreds; and so on with all the following kinds.

3. In order to collect together or add two or more numbers will require, that one can add to any single number one of the nine simple numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, which can be given either by counting on the fingers, or can be accomplished in some more ready manner such as by learning a table, from which one can see how much arises when one of the nine simple numbers is added to a given number.

Since all numbers are composed from the first nine simple numbers, the ease in arithmetic operations consists of the fact that with the very largest numbers we can use those operations, which we know how to do with the nine simple numbers. For this reason it is also required in addition that we know how to compose the simple numbers; and in addition no rules are given for this operation. But if we have learned to add the simple numbers, thus we are in a position, that larger numbers as always to be given also added, or to be brought into a sum. Thus, before these rules are given, it is assumed that we can add together the simple numbers, which is very easy, if we can only count, and presents no difficulty whatsoever. Then if we continue to count further from a given number, the next which follows is one greater than the given number, the second of the following two, the third three, and so on. And in this way we can by counting on the fingers to any given number still set down one of the nine simple numbers. Meanwhile, however, it is useful to have the following table in mind, from which we can learn the sum of two simple numbers:

1 and 1 makes 2	1 and 8 makes 9
1 " 2 " 3	1 " 9 " 10
1 " 3 " 4	2 and 2 makes 4
1 " 4 " 5	2 " 3 " 5
1 " 5 " 6	2 " 4 " 6
1 " 6 " 7	2 " 5 " 7
1 " 7 " 8	5 " 5 " 10
2 " 6 " 8	
2 " 7 " 9	

2 " 8 " 10	5 " 6 " 11
2 " 9 " 11	5 " 7 " 12
3 and 3 makes 6	5 " 8 " 13
3 " 4 " 7	5 " 9 " 14
3 " 5 " 8	6 and 6 makes 12
3 " 6 " 9	6 " 7 " 13
3 " 7 " 10	6 " 8 " 14
3 " 8 " 11	6 " 9 " 15
3 " 9 " 12	7 and 7 makes 14
4 and 4 makes 8	7 " 8 " 15
4 " 5 " 9	7 " 9 " 16
4 " 6 " 10	8 and 8 makes 16
4 " 7 " 11	8 " 9 " 17
4 " 8 " 12	9 and 9 makes 18
4 " 9 " 13	

Now had this table been memorized, then through the help of the same, and also with less trouble, a simple number can be added to any number. But where each of these, which is at best obtained through diligent practice, should any difficulty be had, so can the same be upheld by the rules of addition themselves : then this table is sufficient for the addition of two numbers, as big as they always may be. But if three or more numbers should be collected together, so must the sum of any three or more simple numbers be known. Now if this were difficult, only two numbers could be added in the first place; and then to the sum one more; and so on until all given numbers have been brought into a sum. Therefore in this way no more than 2 numbers can be added at once, so we can content ourselves with the given table and the addition of more numbers used in the known manner, until greater skill has been acquired.

4. If two or more numbers must be added together or to be made into a sum, thus the sum will be found if we add together all the units, and then all the tens, further all the hundreds, thousands, and so forth. But it is required to know how the tens, hundreds, thousands, are to be added in the same way as the units have been learned above.

While the sum must be equal to those given numbers named together ; so must the same form be composed from just as many units, tens, hundreds, thousands , etc., as the given numbers contain altogether. Wherefore the sum will be found, if in the first place we add the units of the given numbers, and then the tens, further the hundreds and thousands, and so on, and add all these kinds together. Thus the sum is required of two or more numbers, that we know in addition to the units, equally the tens, hundreds, thousands, and so forth to be summed. As for the units, thus the sum of the same itself to be given in the foregoing point : then the given numbers, as we assume from the given method either to be spoken or written, thus can never become more than 9 parts of a kind ; and therefore, according to the units to be added, it is enough, if we know a simple

number to be added for each one of the given numbers. With the other following kinds, as for the tens, hundred, thousands and so forth, it has an equal consideration, and as we can add the units together, so likewise the tens, hundreds, and the following kinds can be added. Then just as 7 units and 9 make together sixteen units; thus also 7 tens and 9 tens make together sixteen tens; and 7 parts and 9 parts of any kind make together 16 parts of the same sort. From which it is clear that various parts from any kind, such as tens, hundreds, thousands, and so forth, just as easily and in the same manner to be added together, as the units. To explain these better, thus let these numbers 5326 and 4937 to be given, of which the sum must be found. Following the instructions given, the first place contains the sum of 6 and 7, that is 13 units, according to the last table ; the second 2 and 3, that is 5 tens; the third 3 and 9, that is 12 hundreds; and the fourth 5 and 4, that is 9 thousands. And therefore we can say with certainty, that the sum of these given numbers to be 9 thousands, 12 hundreds, 5 tens and 13 units. Here this single difficulty remains, that this number or sum, thus as it is implied here, cannot be written, while more than 9 hundreds and 9 units being produced ; which runs against the nature of this manner of writing. Therefore if in the addition more than 9 parts of any kind arise, thus this difficulty in the writing to be removed, which shall be done in the following item.

5. If in the addition of the units, tens, hundreds, and so forth, it happens that more than nine of any kind arise; thus just as many parts must be added to the following kind, until less than ten parts of the same kind remain. But the parts from the foregoing kind must themselves be added to the sum of the same kind. By this method we now maintain, that no more than nine parts arise from any kind ; on account of which the sum sought can be easily written.

Since ten units add up to ten, moreover ten decades add up to a hundred, and ten hundreds to a thousand and so forth, thus it is easy from that, if in the addition more than 9 units arise, the same making one or two more tens, which then must be added to the addition of the tens. It happens likewise in the same manner with the decades, which, if more than nine arise, one or two more hundreds are to be accounted for. Further operating according to the method of adding the following kinds, and to maintain in that way, that never more than nine of any kind arises. And where these occur, it will be easy then, from what has been learned about the writing down of numbers in the previous chapter, to write down the sum provided. But so that it may be seen easier, how often a certain number of decades of units, or of a certain number of tens of hundreds to be themselves considered and so on further; thus it is useful to write down and to see that we have found the sum of the units, of the tens, or of the hundreds and any of the following kinds in the usual manner, whether the same consists of more than one character. Then if the sum consists of one kind only with one character, then the same contains no part of the following kind, but contains the name of the units or decades and so forth, in which it is found to be. But if the sum written in this way consists of two characters, thus the one on the left hand indicates how many parts of the following kind contained in this sum, which consequently must be struck off and added to the sum of the following kind. But all these will be able to be seen more thoroughly after the following example: Since it is

wished, that the sum of these three numbers 2304, 5629 and 7230 be known. To find these, thus we must add the units of these three numbers together, which amounts to thirteen or 13 Units. From this it is known, that this sum is understood to be 1 ten and 3 units; for which reason only 3 units are to be retained; and the one ten will be put with the with the tens. But the tens from these three numbers added together gives 5 tens, and to this the above one ten done 6 tens; in which thus no hundreds is present. Further the 3, 6 and 2 hundreds are to be added; so eleven or 11 hundreds are found; this sum is thus as much as 1 hundred and 1 thousand, which must be added to the thousands. This thousand thus with 2 and 5 and 7 thousands added together make 15 thousands; that is 5 thousand and one of ten thousands. All these together or the sum of the three given numbers is therefore a tens of thousands and 5 thousands and 1 hundred and 6 tens and 3 units ; which written gives 15163, or fifteen thousand one hundred and sixty three. But should a part of a hundred or more arise in the addition, thus the sum contains ten or more parts and a following part must be added to the second following part. As if the sum of the tens were found to become 125, thus we must add 2 parts to the hundreds and 1 to the thousands. This is thus the basis of addition, from which it is clearly evident, that the number found in this manner must necessarily be the sum of the given numbers ; in that the same in themselves all contain just as many units, tens, hundreds, and so forth as the given numbers all added together. However, just to complete this operation quickly and completely, some advantages will be shown, through which the work will be much easier.

6. If it is wished to add two or more numbers or to sum them together, then write the same under each other, so that the units, and equally also the tens and hundreds, etc, can be placed under each other, and under these draw a line, below which the sum sought should be put in place. As then the answer is made from the right hand side and the units collected together to be added ; the sum of which, if it is smaller than 10, will be written under the units beneath the line ; but if the sum is greater than 9 and consequently contains one or more tens together with a number of units, thus now this number of units will be written below the line, but the tens by adding the ten on still. In a like manner also, further the tens added and further the hundreds, thousands etc. Whereby now with all these done, so the number, which arises and to be placed here, gives the sum of the given numbers sought.

The numbers, which are to be added, will be written under each other, with that the numbers, of any kind, namely whether they signify units, tens, hundreds, etc., therefore are placed downwards in any column, and thus so much better to be seen and can become more convenient to be added. Further it is found that the addition of the columns, that is from the smallest kind, and proceeding to the left, that is, to the larger kinds; wherein on adding, the smaller kinds can be put in place before the larger kinds, which then must be added to the larger kinds ; which is why the addition of the smaller kinds is done first. Furthermore the whole operation can be understood thoroughly by an example. Let the following numbers be added 53237; 8729 and 10237 ; so these numbers will be written under each other as follows :

$$\begin{array}{r}
 53237 \\
 8729 \\
 \hline
 10237 \\
 \hline
 72203
 \end{array}$$

Ch. 2 of Euler's Arithmetica 1.0.2.3:7
 ARITHMETIC OR THE GENERAL ART OF RECKONING.

Translated from German by Ian Bruce; 6/6/2018.

Free download at 17centurymaths.com.

53237

8729

10.237

72203

since then the first column down from above indicates units, the second tens, the third hundreds, the fourth thousands, and the fifth tens of thousands. Now in the first place the units are added, and said : 7 and 9 makes 16 and again 7 to that makes 23 units, that is 2 tens, which must be added to the second column and therefore this column to be marked with 2 points; but the three units will be under the line for the first place from the right hand, that is, to be written in the place of the units. The second column give us for the tens and we say: 3 and 2 makes 5 and 3 again makes 8 and still 2, which is to be understood through the 2 points, makes 10 tens, that is 1 hundred and no tens ; as now no tens are present, thus under the line for the second place a 0 will be written ; but the 1 of the hundreds will be indicated by means of a point by the third column of the hundreds. In the third place we say : 2 and 7 make 9 and still 2 makes 11 and again 1 because the point makes 12 hundreds, that is 1 thousand, which will be indicated by a point by the following column, and two hundreds, which will be written under the line for the third place. In the fourth place 3 thousands and 8 thousands and still another to be taken to make together 12 thousands or 1 hundred thousand, to be shown by a point beside this kind, and 2 thousands, which will be written under the line for the fifth place. Finally we have still 5 and 1 and still 1 tens of thousands, that is 7 tens of thousands, which will be written under the line of the fifth place. With this the operation is brought to an end, whereby the sum of the given numbers is : seventy two thousand, two hundred and three. From carrying out these examples not only can the foundations of arithmetic be learned, but also the basis of the common rules be learned, which we can obtain in a few words from the following example :

935078

846181

757293

235604

2774156

These four numbers are to be added, thus we say, following the same according to the method shown to be written : 8 and 1 makes 9 and 3 makes 12 and 4 makes 16; thus write 6 and keep 1 for the following column. Further: 7 and 8 makes 15 and 9 makes 24 and 1 makes 25; write 5 and carry 2. Third: 1 and 2 makes 3 and 6 makes 9 and 2 makes 11; write 1 and carry 1. Fourth: 5 and 6 makes 11 and 7 makes 18 and 5 makes 23 and 1 makes 24; write 4 and carry 2. Fifth we say: 3 and 4 makes 7 and 5 makes 12 and 3 makes 15 and 2 makes 17; writet 7 and carry 1. Sixth: 9 and 8 makes 17 and 7 makes 24 and 2 and 1 makes 27; write 7 and from that also 2, since no more columns follow, to

which these still must be added. The sum of these four numbers is therefore 2774156.
 This operation can be applied further in the following example:

$$\begin{array}{r}
 987654321 \quad 123456789 \\
 98765432 \quad 234567891 \\
 9876543 \quad 345678912 \\
 987654 \quad 456789123 \\
 98765 \quad 567891234 \\
 9876 \quad 678912345 \\
 987 \quad 789123456 \\
 98 \quad 891234567 \\
 \underline{\quad 9} \quad 912345678 \\
 1097393685 \quad 4999999995
 \end{array}$$

We have these in these examples, which still by addition, the following columns must be added together without the points marked, while we must get used to retaining these points in memory. Whereby the following examples have been put in place to be added, from which we see, what kind of questions can be resolved by addition.

Examples of Addition

I. In the destruction of the city of Troy it is mentioned in history that of the Greeks 880000 men died, while of the Trojans 686000 men died: now the question is, how many men altogether thereby lost their lives?

Ans.: The number of all who perished can be found by addition; if we bring all the Greeks as well as the Trojans into one sum ; as follows :

$$\begin{array}{r}
 880000 \\
 \underline{686000} \\
 \text{Total: } 1566000 \text{ the number of all dead.}
 \end{array}$$

II. Four people owe to pay me : the first 6952 Ruble, the second 8346 Ruble, the third 6259 Ruble, and the fourth 5490 Ruble. Now I would like to know, how much am I required to have from these 4 people ?

Ans.: Just as much as these four numbers together amount to in any sum ; this sum sought will hence be found by addition, as follows:

$$\begin{array}{r} 6952 \\ 8346 \\ 6259 \\ \underline{5490} \\ \text{Total : } 27047 \text{ Rubel,} \end{array}$$

so much have I claimed from all four.

III. The holy Scriptures testify, that Methuselah, when he begat Lamech, was 187 years old, and after this time still had lived 782 years. From which we would like to know, the whole age of Methuselah.

Ans.: Methuselah had lived just as many years, as the two numbers 187 and 782 together make up in a sum , thus will be found as follows :

$$\begin{array}{r} 187 \\ \underline{782} \\ \text{Total: } 969 \text{ years is the whole age of Mathusalem.} \end{array}$$

IV. A. GELLIUS thought [see *Attic Nights*], that the poet Homer lived 160 years before the building of the city of Rome. Now Rome was built 752 years before the birth of Christ; and from the birth of Christ until now 1737 years have passed. Now it is asked, how long ago did the poet Homer live ?

Ans.: From the times of Homer until now, 160 and 752 and 1737 years have passed, which three numbers together make as follows :

$$\begin{array}{r} 160 \\ 752 \\ 1737 \\ \text{Total: } 2649 \text{ years; and thus before so many years} \\ \text{had the poet Homer lived.} \end{array}$$

CAPITEL 2

VON DER ADDITION ALS DER ERSTEN ARITHMETISCHEN OPERATION

1. In der Addition werden solche Regeln gegeben, durch derer Hülfe man eine Zahl finden kann, welche ebenso gross ist, als zwei oder mehr gegebene Zahlen. Diese Zahl, welche durch diese Regeln gefunden wird, pflegt die Summe der gegebenen Zahlen geneunet zu werden.

Wir haben im vorigen Capitel dargethan, dass wir von grossen Zahlen keinen deutlichen Begriff haben, wenn wir nicht wissen, wie dieselben aus kleineren Zahlen zusammengesetzt sind. Als wenn man sich die Zahl 1735 vorstellt, so bestehet der Begriff von derselben darinnen, dass man weiss, dass dieselbe aus tausend und siebenhundert und dreissig und fünf zusammengesetzt, oder die Summe dieser Zahlen sei. Von diesen Theilen aber wird vorausgesetzt, dass man einen deutlichen Begriff habe; welches im vorhergehenden Capitel genugsam ist ausgeführet worden. Es bestehet nämlich die Erkenntnis der Zahlen darinn, dass man wisse, aus wieviel Unitäten, Decaden, Centenariis, Millenariis etc. eine jegliche Zahl bestehe; und nach diesen Theilen ist sowohl die Art die Zahlen zu schreiben als dieselben mit Worten auszusprechen eingerichtet. Wenn man sich demnach von einer Zahl, welche aus Zusammensetzung zweier oder mehr gegebenen Zahlen entstehet, einen deutlichen Begriff formiren will, so muss man untersuchen, aus wieviel Unitäten, Decadibus, Centenariis etc. dieselbe bestehe. Denn wenn man dieses gefunden, so ist man im Stande, die verlangte Zahl sowohl zu schreiben als mit Worten auszusprechen. Diese Operation nun, dadurch gefunden wird, aus wieviel solcher Theilen die Summe zweier oder mehr gegebenen Zahlen bestehe, wird die Addition geneunet. Und deswegen erhalten wir durch die Addition einen deutlichen Begriff von der Summe zweier oder mehr gegebenen Zahlen, und lernen dieselbe sowohl schreiben, als mit Worten aussprechen. Als wenn die Summe von diesen zweien Zahlen 247 und 328 verlangt wird, so ist zwar der Begriff davon schon ziemlich deutlich, weil man weiss, dass dieselbe den zwei gegebenen Zahlen zusammengenommen gleich ist. Man verlangt aber zu vollkommener Erkenntnis dieser Summe zu wissen, aus wieviel Unitäten, Decadibus, Centenariis etc. dieselbe bestehe, damit man dieselbe nach der gewöhnlichen Art schreiben und mit Worten aussprechen könne. Dieses nun zu bewerkstelligen giebt uns die Addition sichere und leichte Regeln an die Hand, derer Richtigkeit und Gebrauch wir also gründlich und ausführlich beschreiben werden.

2. Zur Addition zweier oder mehr Zahlen wird erfordert, dass man wisse die Unitates, die Decades, Centenarios etc. insbesondere zu addiren. Und da 10 Unitates eine Decadem, 10 Decades einen Centenarium, 10 Centenarii einen Millenarium und so fort ausmachen, so ist nöthig, dass, wenn in der Addition mehr als 9 Stücke von einer Gattungen vorkommen, dieselben zu höheren Gattungen geschlagen werden, so dass niemals mehr als 9 Stücke von einer Gattung in Consideration kommen.

Da die Zahlen, welche zusammengesetzt werden sollen, aus Unitaten, Decaden, Centenariis und so fort, bestehen; so muss die Summe eben so viel Unitäten und Decaden und Centenarios und so weiter in sich begreifen, als die gegebenen Zahlen insgesamt in sich enthalten. Derowegen um zwei oder mehr Zahlen zusammen zu addiren wird erfordert, dass man die Unitäten, Decades, Centenarios etc. jede insbesondere addire. Da aber ausser der 0 nicht mehr als neun Characteres vorhanden sind, dadurch eine gewisse Anzahl entweder von Unitäten oder Decaden oder Centenariis etc. kann angedeutet werden, so können niemals mehr als neun von einer Sorte durch diese Characteres bemerkt werden. Derowegen, wenn mehr als neun von einer Sorte vorkommen, so müssen daraus so viel von den folgenden höheren Sorten formirt werden, als möglich ist, bis weniger als 10 von einer jeglichen Gattung übrig bleiben. Diese Verwechslung geschieht nun durch Hülfe der Verhältnisse zwischen allen diesen Gattungen, da nämlich 10 Unitäten eine Decadem, 10 Decades einen Centenarium, 10 Centenarii einen Millenarium erfüllen, und so weiter. Weilen nun unsere Begriffe von den Zahlen in so ferne deutlich sind, als wir begreifen, aus wieviel Stücken von einer jeglichen Sorte dieselben bestenden, so gibt sich die obgedachte Verwechslung von selbst, so bald man die Summe verschiedener Anzahlen von Unitäten oder Decaden oder Centenariis etc. erkennt. Als wenn man weiss, dass 8 und 9 zusammen siebenzehn ausmachen, so weiss man zugleich, dass 8 und 9 Unitates zusammen eben so viel ist als eine Decas nebst 7 Unitäten. Gleichergestalt sind 8 und 9 Decades so gross als ein Centenarius und 7 Decades; und 8 und 9 Centenarii so gross als ein Millenarius nebst 7 Centenariis; und so weiter mit allen folgenden Sorten.

3. Um zwei oder mehr Zahlen zusammensetzen oder zu addiren wird erfordert, dass man zu einer jeglichen Zahl könne eine von den 9 einfachen Zahlen als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, hinzusetzen, welches entweder durch die Abzählung an den Fingern oder auf eine fertigere Art durch die Erlernung einer Tabelle kann bewerkstelliget werden, aus welcher man sehen kann, wieviel herauskommt, wenn zu einer gegebenen Zahl eine von den 9 einfachen Zahlen hinzugesetzt wird.

Da alle Zahlen aus den neun ersten einfachen Zahlen zusammengesetzt sind: so bestehet die Leichtigkeit in den arithmetischen Operationen darinn, dass man mit den allergrössten Zahlen eben diejenigen Operationen anstellen kann, welche man mit den neun einfachen Zahlen zu machen weiss. Derowegen wird auch in der Addition erfordert, dass man die einfachen Zahlen zusammensetzen wisse; und dazu werden in dieser Operation keine Regeln gegeben. Wenn man aber die einfachen Zahlen zu addiren gelernet, so ist man im Stande, so grosse Zahlen als immer vorgegeben werden zu addiren oder in eine Summe zu bringen. Es wird demnach, ehe diese Regeln gegeben werden, vorausgesetzt, dass man wisse die einfachen Zahlen zusammen zu addiren, welches auch, wenn man nur zählen kann, sehr leicht ist und ganz keine Schwierigkeit hat. Denn wenn man von einer gegebenen Zahl weiter fortzählet, so ist die nächste, welche folget, um eins grösser als die gegebene, die zweite der folgenden um zwei, die dritte um drei und so fort. Und auf diese Art kann man durch Abzählung an den Fingern zu einer jeglichen Zahl noch eine von den neun einfachen Zahlen hinzusetzen.

Unterdessen aber ist dennoch dienlich, dass man nachfolgende Tabelle im Kopfe habe, aus welcher man die Summe je zweier einfachen Zahlen anzeigen lernet:

1 und 1 macht 2	1 und 8 macht 9
1 " 2 " 3	1 " 9 " 10
1 " 3 " 4	2 und 2 macht 4
1 " 4 " 5	2 " 3 " 5
1 " 5 " 6	2 " 4 " 6
1 " 6 " 7	2 " 5 " 7
1 " 7 " 8	5 " 5 " 10
2 " 6 " 8	5 " 6 " 11
2 " 7 " 9	5 " 7 " 12
2 " 8 " 10	5 " 8 " 13
2 " 9 " 11	5 " 9 " 14
3 und 3 macht 6	6 und 6 macht 12
3 " 4 " 7	6 " 7 " 13
3 " 5 " 8	6 " 8 " 14
3 " 6 " 9	6 " 9 " 15
3 " 7 " 10	7 und 7 macht 14
3 " 8 " 11	7 " 8 " 15
3 " 9 " 12	7 " 9 " 16
4 und 4 macht 8	8 und 8 macht 16
4 " 5 " 9	8 " 9 " 17
4 " 6 " 10	9 und 9 macht 18
4 " 7 " 11	
4 " 8 " 12	
4 " 9 " 13	

Hat man nun diese Tabelle im Gedächtnis, so kann man durch Hülfe derselben auch mit leichter Mühe zu einer jeglichen Zahl noch eine einfache hinzusetzen. Wo aber je dieses, welches am besten durch eine fleissige Übung erhalten wird, sollte einige Schwierigkeit haben, so kann dieselbe durch die Regeln der Addition selbst gehoben werden: dann diese Tabelle ist hinlänglich zu Addirung zweier Zahlen, so gross sie auch immer sind. Wenn aber drei oder mehr Zahlen sollten zusammengesetzt werden, so müsste man auch die Summe von je drei oder mehr einfachen Zahlen wissen. Weilen nun dieses beschwerlich fiele, so könnte man erstlich nur 2 Zahlen addiren; und sodann zu der Summe noch eine; und so fort, bis alle gegebenen Zahlen in eine Summe sind gebracht worden. Weilen demnach auf diese Art niemals mehr als 2 Zahlen auf einmal zu addiren vorkommen, so kann man sich mit der

gegebenen Tabelle so lange begnügen und die Addition mehrerer Zahlen auf besagte Art anstellen, bis man eine grössere Fertigkeit bekommen.

4. Wenn zwei oder mehr Zahlen sollen zusammengesetzt oder in eine Summe gebracht werden, so wird die Summe gefunden wenn man alle Unitäten zusammensetzt, und denn alle Decades, ferner alle Centenarios, Millenarios und so fort. Es können aber die Decades, Centenarii, Millenarii, unter sich auf eben die Art addiret werden, als die Unitäten, welche zu addiren im vorigen ist gelehret worden.

Weilen die Summe gleich sein muss denen gegebenen Zahlen zusammengenommen; so muss dieselbe aus so viel Unitäten, Decadibus, Centenariis, Millenariis etc. bestehen, als die gegebenen Zahlen insgesamt enthalten. Derohalben wird die Summe gefunden, wenn man erstlich die Unitäten der gegebenen Zahlen, und denn die Decades, ferner die Centenarios und Millenarios und so fort addiret, und alle diese Sorten zusammensetzt. Die Summe also von zweien oder mehr Zahlen zu finden wird erfordert, dass man wisse insbesondere die Unitäten, ingleichem die Decades, Centenarios, Millenarios und so fort zusammensetzen. Was die Unitäten betrifft, so ist die Zusammensetzung derselben im vorhergehenden Punkt gemeldet worden: denn wenn die gegebenen Zahlen, wie wir voraussetzen, auf die gewöhnliche Art entweder ausgesprochen oder geschrieben werden, so können niemals mehr als 9 Stücke von einer Gattung vorkommen; und demnach, um die Unitäten zu addiren, ist genug, wenn man weiss zu einer jeglichen Zahl eine einfache Zahl hinzuzusetzen. Mit den anderen und folgenden Sorten, als Decadibus, Centenariis, Millenariis und so fort, hat es eine gleiche Bewandnis, und wer die Unitäten zusammen addiren kann, derselbe kann auf gleiche Weise die Decades, Centenarios und folgenden Sorten addiren. Denn gleichwie 7 Unitäten und 9 Unitäten zusammen sechzehn Unitäten machen; so machen auch 7 Decades und 9 Decades zusammen sechzehn Decades; und 7 Stücke und 9 Stücke von einerlei Sorten machen zusammen 16 Stücke von eben der Sorte. Woraus erhellet, dass verschiedene Stücke von einer jeglichen Gattung, als Decades, Centenarii, Millenarii und so fort, ebenso leicht und auf eben die Art zusammengesetzt werden, als die Unitäten. Dieses besser zu erläutern, so seien diese Zahlen 5 326 und 4 937 gegeben, derer Summe gefunden werden soll. Nach der gegebenen Anleitung muss nun die Summe erstlich 6 und 7, das ist nach der vorigen Tabelle 13 Unitäten enthalten; zweitens 2 und 3, das ist 5 Decades; drittens 3 und 9, das ist 12 Centenarios; und viertens 5 und 4, das ist 9 Millenarios. Und derohalben kann man mit Gewissheit sagen, dass die Summe dieser gegebenen Zahlen sei 9 Millenarii, 12 Centenarii, 5 Decades und 13 Unitates. Allein hiebei ist diese Schwierigkeit, dass diese Zahl oder Summe, so wie sie hier ist angedeutet worden, nicht geschrieben werden kann, weilen mehr als 9 Centenarii und Unitates vorkommen; welches wider die Natur dieser Schreibart läuft. Wenn demnach in dem Addiren mehr als 9 Stücke von einer Gattung vorkommen, so muss dieser Schwierigkeit im Schreiben abgeholfen werden, welches im folgenden Punkt geschehen soll.

5. Wenn in Zusammensetzung der Unitatum, Decadum, Centenariorum und so fort, geschieht, dass mehr als neun von einer Sorte herauskommen; so müssen daraus von der

folgenden Sorte so viel Stücke gemacht werden, bis weniger als zehn Stücke bei derselben Sorte vorhanden bleiben. Die Stücke aber von der folgenden Sorte müssen zu der Summe derselben Sorte addiret werden. Auf diese Art wird man nun erhalten, dass von keiner Sorte mehr als neun Stücke herauskommen; weswegen alsdenn die gesuchte Summe leicht wird können geschrieben werden.

Da zehn Unitäten eine Decadem ausmachen, zehn Decades aber einen Centenarium, und zehn Centenarii einen Millenarium und so fort, so wird daraus leicht sein, wenn im Addiren mehr als 9 Unitäten herauskommen, aus denselben eine oder zwei oder mehr Decades zu machen, welche sodann bei der Addition der Decadem mit hinzugesetzt werden müssen. Auf gleiche Weise ist es auch beschaffen mit den Decadibus, welche, wenn mehr als neun vorkommen, einen oder zwei oder mehr Centenarios ausmachen. Ferner operiret man auf eben die Art in Addirung der folgenden Sorten, und erhält dadurch, dass niemals mehr als neun von einer Sorte herauskommen. Und wo dieses geschehen, so wird aus dem, was im vorigen Capitel von der Schreibung der Zahlen gelehret worden ist, leicht sein, die herausgebrachte Summe zu schreiben. Um aber leichter zu sehen, wieviel eine gewisse Anzahl Unitäten Decades, oder eine gewisse Anzahl Decades Centenarios in sich begreifen und so weiter; so ist dienlich, dass man die gefundene Summe der Unitäten oder Decadem oder Centenariorum und folgenden Sorten auf die gewöhnliche Art schreibe und sehe, ob dieselbe aus mehr als einem Character bestehe. Denn bestehet die Summe von einer Sorte nur aus einem Character, so enthält dieselbe kein Stück von der folgenden Sorte, sondern behält den Namen von Unitäten oder Decaden und so fort, aus welchen sie ist gefunden worden. Bestehet aber die Summe auf diese Art geschrieben aus zwei Characteren, so deutet der zur linken Hand an, wie viel Stück von der folgenden Sorte in dieser Summe enthalten, welche folglich mit zu der Summe der folgenden Sorte müssen geschlagen werden. Dieses alles aber wird deutlicher aus nachfolgendem Exempel ersehen werden: Als man verlangt, die Summe von diesen drei Zahlen 2304, 5629 und 7230 zu wissen. Diese zu finden addiret man also die Unitäten von diesen drei Zahlen zusammen, welche ausmachen dreizehn oder 13 Unitäten. Hieraus erkennet man, dass diese Summe 1 Decadem und 3 Unitäten begreife; weswegen nur 3 Unitäten vorhanden sind; und die eine Decas wird mit zu den Decadibus gesetzt. Die Decades aber von diesen drei Zahlen zusammengenommen geben 5 Decades, und zu diesen die obige eine Decas gethan macht 6 Decades; worinn also kein Centenarius enthalten ist. Ferner addire man die 3 und 6 und 2 Centenarios; so findet man elf oder 11 Centenarios; diese Summe ist also so viel als 1 Centenarius und 1 Millenarius, welcher zu den Millenariis muss hinzugethan werden. Dieser Millenarius also und 2 und 5 und 7 Millenarii machen zusammen 15 Millenarios; das ist 5 Millenarii und eine Decas Millenariorum. Alles dieses zusammen oder die Summe der drei gegebenen Zahlen ist derowegen eine Decas Millenariorum und 5 Millenarii und 1 Centenarius und 6 Decades und 3 Unitäten; welche geschrieben geben 15163, oder fünfzehntausend einhundertunddreiundsechzig. Sollten aber in Addirung einer Sorte hundert oder mehr Stücke herauskommen, so enthält die Summe zehn oder mehr von der folgenden und folglich ein Stück zu der zweiten folgenden Sorte. Als wenn die Summe der Decadem wäre gefunden worden 125, so müsste man 2 Stücke zu den Centenariis

und 1 zu den Millenariis hinzusetzen. Dieses ist also der Grund der Addition, aus welchem klar erhellet, dass die auf diese Art gefundene Zahl nothwendig die Summe der gegebenen Zahlen sein müsse; indem dieselbe allein eben so viel Unitäten, Decades, Centenarios und so fort in sich enthält, als die gegebenen Zahlen insgesamt. Eben diese Operation aber geschwind und fertig zu verrichten, so werden einige Vortheile gewiesen werden, dadurch die Arbeit sehr erleichtert wird.

6. Wenn zwei oder mehr Zahlen sollen addiret oder zusammengesetzt werden, so schreibe man dieselben untereinander, so dass die Unitäten, imgleichen auch die Decades und Centenarii und so weiter, untereinander zu stehen kommen, und ziehe unter diese Zahlen eine Linie, unter welche die gesuchte Summe gesetzt werden soll. Alsdenn wird von der rechten Hand der Anfang gemacht und die Unitäten zusammen addiret; deren Summe, wenn sie kleiner ist als 10, wird unter die Unitäten unter die Linie geschrieben; ist die Summe aber grösser als 9 und enthält folglich eine oder mehr Decades nebst etlichen Unitäten, so wird nur diese Anzahl der Unitäten unter die Linie geschrieben, die Decades aber bei Addirung der Decadum noch hinzugethan. Auf gleiche Art werden auch ferner die Decades addiret und weiter die Centenarii, Millenarii und so fort. Wo nun dieses alles geschehen, so ist die Zahl, welche herausgekommen und unter die Linie gesetzt worden, die verlangte Summe der gegebenen Zahlen.

Die Zahlen, welche addiret werden sollen, werden deswegen untereinander geschrieben, damit die Zahlen, welche in einer Reihe von oben herab stehen, einerlei Sorten, nämlich entweder Unitäten oder Decades oder Centenarii und so fort bedeuten, und also besser ins Gesicht fallen und desto bequemer addiret werden können. Ferner fängt man die Addition von der Rechten, das ist von den kleineren Sorten an, und fährt

$$\begin{array}{r} 53237 \\ 8729 \\ \hline 10.237 \\ \hline 72203 \end{array}$$

fort gegen der Linken, das ist zu den grösseren Sorten; weilen in Addirung der kleineren Sorten grössere Sorten entstehen können, welche alsdann zu den grösseren hinzugethan werden müssen; weswegen die Addition der kleineren Sorten zuerst verrichtet wird. Die ganze Operation kann im übrigen durch Exempel am deutlichsten gewiesen werden. Als es sollen nachfolgende Zahlen 53237; 8729 und 10237 addiret werden; so werden diese Zahlen untereinander geschrieben wie folget:

da dann die erste Reihe von oben herab Unitäten, die zweite Decades, die dritte Centenarios, die vierte Millenarios, und die fünfte Decades Millenariorum bedeutet. Nun werden erstlich die Unitäten addiret und gesagt: 7 und 9 macht 16 und noch 7 dazu macht 23 Unitäten, das ist 2 Decades, welche zu der zweiten Reihe müssen hinzugethan und deswegen bei dieser Reihe mit 2 Punkten bemerkt werden; die drei Unitäten aber werden unter die Linie auf die erste Stelle von der rechten Hand, das ist auf die Stelle der Unitäten, geschrieben. Zweitens geht man zu den Decaden und sagt: 3 und 2 macht 5 und

noch 3 macht 8 und noch 2, welche durch die 2 Punkten angedeutet worden, macht 10 Decades, das ist 1 Centenarius und keine Decas; weil nun keine Decas vorhanden, so wird unter die Linie auf die zweite Stelle eine 0 geschrieben; der 1 Centenarius aber wird durch einen Punkt bei der dritten Reihe der Centenariorum angedeutet. Drittens sagt man: 2 und 7 macht 9 und noch 2 macht 11 und noch 1 wegen dem Punkt macht 12 Centenarios, das ist 1 Millenarius, welcher durch einen Punkt bei der folgenden Reihe angedeutet wird: und zwei Centenarii, welche unter die Linie auf die dritte Stelle geschrieben werden. Viertens machen 3 Millenarii und 8 und noch einer zusammen 12 Millenarios oder 1 Decadem Millenariorum, so durch einen Punkt bei dieser Sorte angezeigt wird, und 2 Millenarios, welche unter die Linie auf die vierte Stelle geschrieben werden. Endlich hat man noch 5 und 1 und noch 1 Decadem Millenariorum, das ist 7 Decades Millenariorum, welche unter die Linie auf die fünfte Stelle geschrieben werden. Hiemit ist die Operation zu Ende gebracht, weswegen die Summe der gegebenen Zahlen ist: zweiundsiebenzigtausend zweihundertunddrei. Aus der Ausführung dieses Exempels kann nun nicht nur der Grund der Addition, sondern auch der Grund von den gemeinen Regeln erkannt werden, welche man mit wenig Worten auf folgende Art gebraucht:

$$\begin{array}{r}
 935078 \\
 846181 \\
 757293 \\
 \underline{235604} \\
 2774156
 \end{array}$$

Diese vier Zahlen zu addiren, so sagt man, nachdem dieselben auf die gewiesene Art sind geschrieben worden: 8 und 1 macht 9 und 3 macht 12 und 4 macht 16; schreibt also 6 und behält 1 zur folgenden Reihe. Ferner: 7 und 8 macht 15 und 9 macht 24 und 1 macht 25; schreibt 5 und behält 2. Drittens: 1 und 2 macht 3 und 6 macht 9 und 2 macht 11; schreibt 1 und behält 1. Viertens: 5 und 6 macht 11 und 7 macht 18 und 5 macht 23 und 1 macht 24; schreibt 4 und behält 2. Fünftens sagt man: 3 und 4 macht 7 und 5 macht 12 und 3 macht 15 und 2 macht 17; schreibt 7 und behält 1. Sechstens: 9 und 8 macht 17 und 7 macht 24 und 2 und 1 macht 27; schreibt 7 und dazu auch das 2, weil keine Reihe mehr folgt, dazu dies noch sollte addiret werden. Von den gegebenen 4 Zahlen ist demnach die Summe 2774156. Diese Operation kann ferner in nachfolgenden Exempeln angewandt werden:

987654321	123456789
98765432	234567891
9876543	345678912
987654	456789123
98765	567891234
9876	678912345
987	789123456
98	891234567
<u>9</u>	<u>912345678</u>
1097393685	4999999995

in diesen Exempeln haben wir dasjenige, was noch bei Addirung der folgenden Reihe muss hinzugethan werden, nicht mit Punkten bemerket, weil man sich angewöhnen muss, diese Punkte in dem Gedächtnis zu behalten. Nachfolgende Exempel sind deswegen hinzugesetzt worden, damit man sehe, was für Fragen durch die Addition können aufgelöset werden.

Exempel der Addition

I. Bei Zerstörung der Stadt Troja meldet die Historie, dass von den Griechen 880000 Mann, von den Trojanern aber 686000 Mann umgekommen: nun ist die Frage, wieviel Menschen in allem dabei ihr Leben eingebüset?

Antw.: Die Anzahl aller Umgekommenen wird gefunden durch die Addition; wenn man die Toten sowohl der Griechen als der Trojaner in eine Summe bringt; wie folget:

880000
<u>686000</u>

Summa : 1566000 die Anzahl aller Toten.

II. Vier Personen sind mir schuldig zu bezahlen: der erste 6952 Rubel, der zweite 8346 Rubel, der dritte 6259 Rubel, der vierte 5490 Rubel. Nun wollte ich gerne wissen, wieviel ich in allem von diesen 4 Personen zu fordern hatte?

Antw.: So viel als diese vier Zahlen in einer Summe zusammen ausmachen; diese verlangte Summe wird demnach durch die Addition gefunden, wie folget:

6952

8346

6259

5490

Summa : 27047 Rubel,

so viel ich von allen vieren zu fordern habe.

III. Die heilige Schrift bezeuget, dass 1\mathusalem, als er den Lamech gezeuget, alt war 187 Jahre, und nach dieser Zeit noch gelebt habe 782 Jahre. Woraus man das ganze Alter des Mathusalems zu wissen verlangt.

Antw.: Mathusalem hat so viel Jahre gelebt, als die zwei Zahlen 187 und 782 in einer Summe zusammen ausmachen; wird also gefunden wie folget:

187

782

Summa : 969 Jahre ist das ganze Alter Mathusalems.

IV. A. GELLIUS gedenket, daß der Poet Homerus 160 Jahre vor Erbauung der Stadt Rom gelebet. Nun ist Rom 752 Jahre vor Christi Geburt gebauet worden; und von Christi Geburt bis jetzt sind verflossen 1737 Jahre. Nun wird gefragt, vor wieviel Jahren der Poet Homerus gelebt?

Antw.: Von des Homeri Zeiten bis auf jetzo sind verflossen 160 und 752 und 1737 Jahre, welche drei Zahlen zusammen machen wie folget:

160

752

1737

Summa : 2649 Jahre; und vor so viel Jahren hat
also der Poet Homerus gelebet.