

PROP. VII.

Bullets in their flight are not only depressed beneath their original direction by the action of gravity, but are also frequently driven to the right or left of that direction by the action of some other force.

If it was true, that bullets varied their direction by the action of gravity only, then it ought to happen that the errors, in their flight to the right or left of the mark they were aimed at, should increase in the proportion of the distance of the mark from the piece only: but this is contrary to all experience; the same piece, which will carry its bullet within an inch of the intended mark, at 10 yards distance, cannot be relied on to 10 inches in 100 yards, much less to 30 inches in 300 yards. This increase of the uncertainty of the shot in great distances, more than in the proportion of those distances, must have been observed by all, who have been at any time conversant with the practical part of artillery. Now this inequality can only arise from the track of the bullet being incurvated sideways as well as downwards; for by this means the distance between that incurvated line, and the line of direction, will increase in a much greater ratio than that of the distance ; these lines being coincident at the mouth of the piece, and afterwards separating in the manner of a curve and its tangent, if the mouth of the piece be considered as the point of contact.

But that those, who have not been themselves accustomed to these matters, may entertain no doubt about what we here assert ; I shall recite some experiments, I have made, which will put the matter out of all question.

I took a barrel carrying a ball of $\frac{3}{4}$ of an inch diameter, and fixing it on a heavy carriage, I satisfied myself of the steadiness and truth of its direction, by firing at a board $1\frac{1}{7}$ foot square, which was placed at 180 feet distance ; for I found, that in 16 successive shot I missed the board but once. Now the same barrel being fixed on the same carriage, and fired with a smaller quantity of powder, so that the shock of the discharge would be much less, and consequently the direction less changed, I found, that at 760 yards distance, the ball flew sometimes 100 yards to the right of the line it was pointed on, and at other times 100 yards to the left. I found too, that its direction in the perpendicular line was not less uncertain, it falling one time above 200 yards short of what it did at another; although, by the nicest examination of the piece after the discharge, it appeared not to have the least started from the position it was placed in.

This then sufficiently confirms the proposition, since it was impossible the bullet could have flown in the manner here described, had not the line of its flight been bent round to the right or left as well as downwards.

SCHOLIUM.

The reality of this doubly-incurvated track being thus demonstrated, it may perhaps be asked, what can be the cause of a motion so different from what has been hitherto supposed ? And to this I answer that the deflection in question must be owing to some power acting obliquely to the progressive motion of the body, which power can be no

other than the resistance of the air. If it be farther asked, how the action of the resistance of the air can at any time be in a line oblique to the progressive motion of the body ? I farther reply, that it may sometimes arise perhaps from inequalities in the resisted surface, but that its general cause is doubtless a whirling motion acquired by the bullet about its axis ; for by this motion of rotation, combined with the progressive motion, each part of the bullet's surface will strike the air in a direction very different from what it would do if there was no such whirl ; and the obliquity of the action of the air arising from this cause will be greater, according as the rotatory motion of the bullet is greater in proportion to its progressive motion.

I have now finished all that I proposed to determine in this place, relating to the force of powder and the resistance of the air : but as the knowledge of the resistance of solids to the passage of shot is of great importance in the practical part of gunnery, especially in battering in breach; I shall end the present treatise with a proposition relating thereto, which is as follows.

FIRST REMARK

Two kinds of motion can be found in any one rigid body : the one by which the whole body is moved from one place to another, and this is called the progressive motion of the body. The other kind is a rotational motion, by which the body rotates around itself, or about an axis passing through its centre. Here the discussion refers to rigid bodies only ; for soft or flexible bodies, or any fluid bodies at all, can have as well as these still many other kinds of motion. A rigid body now has either a progressive motion, a rotational motion only, or all motions together. If in such a body only a progressive motion alone is found, thus all the parts of the same not only have the same speed, but also the direction of all the parts shall be parallel to each other. This motion also follows from the first law of mechanics, whereby it is proclaimed, that equally in such a motion a body always progresses with one and the same speed and proceeds along one and the same direction, without any further external force acting on the same, and changing its state. From which it follows conversely, that as often as whenever the speed or the direction of a body changes, it is necessary that an external force must have acted on the same.

Further a body, without changing its position, can have a rotational motion, by which the same will be rotated about an axis. In this motion the axis remains unmoved, and all the parts of the body go around the same, the speed of which is thus much greater, the further the same shall be removed from the axis. If such an axis is fixed, thus one can conveniently envisage such a motion on a turner's wheel, but it can also be moving about an axis that is nowhere fixed. But for this two conditions are necessary: in the first place, that the axis passes through the centre of gravity of the body, and secondly, that the centrifugal forces of all the parts maintain an equilibrium amongst themselves. If both these conditions are satisfied, as also such a motion always remains uniform by the above valid rule, and no change is experienced as long as no external forces act. But if the centrifugal forces of the parts of the body are not continually in equilibrium with each other, thus to be sure the motion of the body continues about an axe, but which itself will

be changing continually, and the rotational motion continually going around another axis. If a ball is made everywhere from an equally dense material, thus the centrifugal forces shall always be in equilibrium, if the axis of the ball goes through the centre, and thus the motion of such a ball can have a continual constant motion about any line, thus going through its centre.

Both these motions, namely the progressive and the rotational, are now distinguished from each other in such a manner, that both can be present at the same time in a body, without the one impeding the other in the least; each one can also be changed alone by an external force acting, without the other suffering the least change. There the spherical earth presents us with an example of such a two-fold motion in a body, as the earth itself in the first place according to its progressive motion moves around the sun in one year, and meanwhile invariably rotates about its axis in 24 hours. In the case of the earth there is still the change of its axis to be noted, as which is directed backwards about 50 each year.

Therefore if a body be impressed not only by a progressive motion, but also by a motion about an axis, thus going through the centre of gravity of the same, and which thus is conditioned so that all centrifugal forces are in equilibrium, thus to be progressing continually, and to suffer no change if no external forces act on that body.

The main point is now based on whether a body has a progressive motion only, or only a rotational one, or whether both kinds of motion are able to be impressed at the same time by a force.

If the direction of the force goes through the centre of gravity of the body, thus the same will be acted on by a progressive force only. Namely if the body were at rest initially, thus the same will be impressed with a motion along the same direction as the force acting; and if the body again previously has a progressive motion, thus the same would become either faster or slower, acting along the direction of the force either forwards or backwards, or it would act obliquely to the direction of the motion. But if the body in addition had a rotational motion as well as the progressive motion, thus the same would remain unchanged from the action of such a force passing through the centre of gravity.

But if the body still had yet a rotational motion as well as the progressive motion, thus the same remains completely unchanged from the action of such a force passing through the centre of gravity of the body. If the direction of the force does not go through the centre of gravity of the body, thus in the first place from that the measure of the motion changes equally, as if now this force were going along a direction parallel to the direction of, and through the centre of gravity. But in addition to this, such a force would impress a rotational motion on the body about an axis, which goes through its centre of gravity, and would be put in place on a perpendicular to the surface, thus drawn through its centre of gravity and the direction of the force. But if the body already had initially a rotational motion, whether about this very axis, or if there were a motion about some other axis, thus the same motion would either become faster or slower, but in this final case the axis itself would change.

But if two or more forces should act together on the body, thus one finds consequently the form which must arise from this in the motions and the changes in the body. In the

first place one imagines, that if all these forces shall go through the centre of gravity in a parallel direction, and the same, and the same changed into a single force, from which the generation and changes of the motion will be determined. Therefore if it happens, that all these forces cancel each other, thus the progressive motion suffers no change at all from that. But afterwards what rotational motion is reached, one thus seeks the moments from all these forces acting according to their actual directions, while one multiplies the same by their distances from the centre of gravity ; and then on comparing these against each other, one finds how strong an effect they must exert on the body about some axis. From this consequently it is possible to determine either the rotational motion generated, if the body had none before, or the change in the same if rotational motion was present already.

After these basic principles we will now examine more closely, what kind of motion a ball may have, which may be fired from a cannon, from the force impressed by the powder, and how the same afterwards may be changed by the air resistance. We will assume initially that the ball is completely round, and its centre of gravity to be at the same position as the mid-point. In this case the forwards moving force acts through the centre of gravity of the ball, while its direction is completely along the axis of the barrel ; therefore the ball will be pressed on by a forwards motion only along the axis of the barrel. The ball therefore receives this very motion, which we have used above published by the author, and consequently it contains no rotational motion from the force of the powder. But because the ball progresses along the inner cavity of the cannon, and suffers friction from that, the direction of which does not go through the centre of the ball, as it touches on the outside, thus by that the ball must have impressed either a rotating or rolling motion, provided it was not hindered much by the wadding. For since the wadding is accustomed to enclose the ball very firmly, thus the friction is made less around the ball and such a rolling motion is suppressed. Therefore the ball goes off into the air, progressing with a simple motion alone, where the same is subjected both to the force of the weigh and the air resistance. The first force always acts through the centre of gravity, and acts only on the progressive motion, from which thus it curves downwards. The force of the resistance in this case also goes through the centre of gravity of the ball, and therefore equally brings forth no rotational motion. And much the same can be concurred about the direction of the ball, as through that the ball will not be pulled away from this vertical plane, in which the motion began. From which it is apparent, that if the ball were fully round, and the centre of gravity is situated at its mid-point, the motion of the ball must be made just as the theory requires. Namely the ball itself moves in a vertical plane, and from the same neither goes off to the right or to the left.

Therefore if the target, towards which one wants to shoot, is located precisely in this vertical plane, thus the shot cannot fail apart from the same going either too high or too low. But if the vertical plane, in which such a ball moves, does not go through the target, so must the shot miss sideways also, and that accordingly so much the further the target is distant from the cannon ; namely if the angle which the right line drawn from the cannon to the target shall be one and the same angle as that made with the indicated vertical plane. Therefore if the ball has wandered to the right of the target once, thus also must all the shots, which can be done without the direction of the cannon being changed, be equally wide of the mark to the right of the target, also equally if the charge of powder

were increased or decreased. Therefore if many shots, which from a fixed barrel of which the direction cannot be changed, the error deviates now to the right now to the left from the target, and also at the greater distances, has grown according to a greater ratio than the distance itself, thus the author rightly concludes, that the path of the ball is present in any vertical plane, and that the same therefore must have a double curvature.

Now we will consider a ball, which certainly is round, except that the centre of gravity of which is located other than at its centre. As long as this ball is subjected to the force of the powder in the barrel of the cannon, thus the direction of this force goes through the mid-point of the ball, and is parallel to the axis of the cannon, consequently this very same progressive motion is obtained, as in that original case ; and if this direction goes through the centre of gravity at the same time, thus also no rotational motion will be produced. But if the centre of gravity of the ball comes to lie apart from this line, towards which the force of the powder acts, thus at the same time a rotational motion will be impressed about the centre of gravity. But since through this very motion the mid-point of the ball soon will be brought to the opposite side of the centre of gravity, thus by this force the original rotational motion of the ball again is reduced, in such a manner, that no consistent rotational motion can be produced in the ball. It has an equal degree of motion, however the ball were fired from the barrel ; since the direction of the resistance then goes through the mid-point of the ball, and since the direction of the same is contrary to the straight ahead motion of the ball, thus from that the forwards motion of the ball changes just as in the former case. But in addition to this the ball obtains a rotational motion about the centre of gravity, through which the mid-point is driven backwards around the centre of gravity. But thus soon the mid-point begins again to come forwards, thus is in the contrary direction to the air resistance, and therefore diminishes the already generated rotational motion, through which the same in the end completely ceases and the ball therefore moves forward, so that its mid-point remains suspended in place behind the centre of gravity. From this it follows, that finally the heavier part of the ball, in which the centre of gravity is located, invariably goes in front, and the lighter part follows after, which circumstance at any time is indeed cumbersome to perceive. In this case therefore also the ball does not swerve from the vertical plane in which the motion began. Therefore this departure can be derived from another smaller cause, as from the lack of complete roundness.

If the ball is not completely round, thus it can happen, that the direction of the force of the powder not only does not pass through the centre of gravity of the ball, but also that the same also cannot even run parallel to the axis of the cannon. In the first case the ball will be impressed with a rotational motion, but which must soon cease as was observed in the preceding case. But the latter case is advanced by the author in particularly strange circumstances ; since then not only will the ball be forced out of the cannon, but also in the direction of the driving force. Therefore the ball will be bounced against the inner wall of the cannon, and therefore from which it again rebounds, and therefore exerts no small force on the cannon. This is the case, of which we have made mention above, that a cannon, though the same may be bored equally straight, nevertheless can be burst from the force of the ball alone, from which the necessity of perfect roundness of the cannon-ball becomes so much more apparent.

But if such a ball, which is not fully round, emerges from the cannon, thus besides that its direction already differs somewhat from the axis of the piece, yet its motion will change much more due to the air resistance, than if the ball were perfectly round. Since then the air resistance itself reaches the outer surface of the ball, thus it is not only possible, that the direction of the resistance may be different from the direction of the motion, but it would also be a much rarer occurrence, if both directions should agree with each other. It can therefore happen, that initially the ball will be forced forwards either more upwards or downwards than would otherwise happen. And one can understand clearly from this, as sometimes a ball can fall to the ground a hundred yards further or nearer than another, if equally both shall be fired from a barrel in the same direction, and with equal charges. But if the direction of the resistance does not lie in the vertical plane, in which the motion has began, thus the ball is driven sideways, either to the right or left. And if the ball is not spinning around its centre, thus this force continually will deviate the ball equally more and more from the vertical plane, and this deviation from the target will become accordingly so much greater. Namely in a doubling of the distance the deviation of the ball from the target not only will become two or three times as great as what would happen, if the ball after passing through the first half of the way, should be pushed sideways no more; but the deviation must become four times as great, if the sideways driving force always remains equally large. But since the same is diminished with the speed of the ball, thus the deviation in fact becomes a little less than 4 times, but always to be greater than three times as great. Therefore the true cause of the uncertainty of the shots consists only in the lack of roundness of the figure of the ball, and not contributed from a marked rotational motion of the ball. On the other hand, if the ball itself in its flight should turn around, thus the force of the resistance must now be directed to the right, then to the left, and therefore the shots would be just as uncertain in shorter distances as in longer ones. But the uncertainties of the shots, which the author produces, to be considered, thus it is not to be assumed, that the same should be so great for cannon-balls. For the author had performed his experiments with lead balls, which not only very markedly depart from keeping a round shape, but also can be subject much more to change of shape in passing through the barrel. Cannon balls conversely are considered usually to have a fully rounded shape, and since they are made of iron, thus it is not so easy to change their shape in the barrel of the cannon. From this reason cannon shots are to be far more certain than musket shots, which are done with lead balls. But from this one must consider the shots fired from drawn carbines, to be excluded, and just for those cases, which will indicate generally the incorrectness of the author's shots. Then because the balls from rifled carbines have a rotational motion, which motion continually accompanies the progressive motion, since consistently any resistive force, through which the ball will either be driven either up, down or sideways, the same in an instant as it were, while the ball itself rotates around, turns in an opposite, therefore from the imperfections of the ball in this case thus no gross uncertainty can arise, as if the ball is endowed with no rotational motion.

[Thus Euler and Robins disagree about the cause of these deviations, and of course Robins was correct, taking his results from experiment, though he could not describe the mechanism involved mathematically, which evidently involves the Bernoulli Principle, dating from the late 1730's ; Euler would have known about this effect, due to his friendship with Daniel Bernoulli. Indeed Newton had observed the deviation of spinning tennis balls on tennis courts, while at Cambridge, and had given an appropriate physical explanation much earlier in the Proc. Royal Soc.; also, in the French edition at the end of this remark, Lombard cites experimental evidence observed by M. le Chavalier d'Abboville in 1766, for cannon balls deviating to the right or left by considerable amounts. Thus Euler's view of the problem was incomplete, by not acknowledging the existence of the spin of the cannon ball inclined at any angle to the vertical, and a lack of a treatment of viscosity at high speeds, leading in reality to some sort of distorted spherical vortex centred on the ball with a compressed leading edge associated at least initially with a shockwave, and a tail with eddies : thus, it would still be an exceedingly hard problem to solve today, even approximately. In the following second remark, he convinces himself that the rotation of the ball has no effect on the motion at all, despite the experimental evidence to the contrary; however, we must not be too hard on Euler, as this was the time of d'Alembert's Paradox, where such outcomes were predicted.]

SECOND REMARK

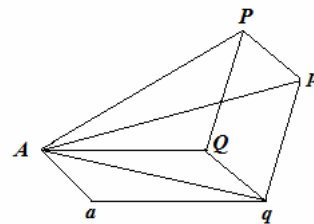
Therefore we have the true uncertainties of the shots, which the author advances in this proposition and explained very doubtfully, undisputedly revealed, while we have found that the same depends only on the figure of the ball. For, if the ball is perfectly round, also if equally its centre of gravity were different from its mid-point, thus the deviation sideways of the ball from the target cannot be observed. And if in this case the ball should miss the target sideways, thus this would be a certain sign, that the target itself is not situated in this vertical plane, along which the axis of the piece or the rifle is directed. But if the ball is not fully round, thus we have shown, that the same for the most part to be deviated sideways from its direction, and the greater the distance of the target from the gun, indeed it must go past the target at a greater distance. This deviation also by the rotation of the ball not only will not be increased, but also if the ball should have such a motion, thus the uncertainty of the shots would not be increased so much by far.

Indeed the author presumes to assert the contrary, besides that which has been mentioned before, thus we can also show that the force of the resistance will not change perceptibly from a rotational motion of the ball, and so great a motion can be almost always ignored, just as if the ball had no rotational motion. It is indeed true, as the author points out, that through such a rotational motion not only the speed must change, with which any point of the ball recoils from the air, but also the angle at which this interaction happens must change also. But in the first place, the direction of the force of the impact remains always perpendicular to the surface of the ball. As from which the force of the impact itself is constantly proportional to the square of the speed, multiplied by the square of the sine of the angle under which the impact occurs, thus this sine of the

angle will be almost always be just so much greater or smaller than the speed diminishes or increases, from which also the strengths of the impacts nearly almost remains, whether the ball may have a rotational motion or not. This equality to be almost true, if the shape of the ball does not differ markedly from a sphere, and if the axis, about which the rotational motion happens, goes almost through the mid-point itself as if the ball were completely round, and about an axis itself, which goes through its mid-point, about which it rotates, thus as if it is the action of the complete resistance of the single case, whether the ball may or may not have such a rotational motion.

We have only to prove this last case ; while it follows from the truth of the same that if the shape of the ball does not depart much from that of a fully round ball, and the axis of the rotation goes almost through the mid-point of the same, the uncertainty of the resistance, if the same does not at all disappear as in the first case, cannot yet be appreciable. Thus so that this can be demonstrated thoroughly, thus we will consider a completely round ball, which besides its progressive motion itself rotates about an axis going through its mid-point; it is also of little concern, if this axis be assumed constant or variable. At first it is to be observed, that if the ball had no progressive motion at all, the same would suffer no other resistance from the air, than which perhaps from the friction of the particles might put in place, but which is so small that one can easily ignore the same from consideration. For if the ball has no forwards motion, thus its mid-point stays completely still, and since all the particles of the surface always remain equally far away from the mid-point, thus the same can have such little motion, by which against the particles of air an actual impulse can be produced. Namely in this case the particles of the air are not set in any kind of motion, as in so far as the same by the weak friction can be dissipated, and therefore the same also can exert no force on the rotating motion of the ball. But if the same ball has a progressive motion, thus one may always thus to be put in place the cause, as was seen above, that if the ball had no progressive motion at all, but conversely the air with an equal speed may be pushed against that, then in both cases the interaction of the air particles must exert one and the same force on the ball.

We will therefore ourselves put in place a ball of which the mid-point shall be motionless, around which the ball itself rotates, and we will put in place that the air shall pass the ball with a given speed. In the diagram suppose the plane of the page touches the ball at the point *A*, and the air bounces off the point *A* of the ball along the direction *PA*. One represents the speed of the air by the line *PA*, and let a perpendicular *PQ* fall from the point *P* on to the tangent plane, and draw the line *AQ*. If now the ball had no rotational motion, thus the strength of the impact of the air would be as the square of the line *PA*, by which the speed of the air is indicated, multiplied by the square of the sine of the angle *PAQ*, which the direction of the motion of the air *PA* makes at this point *A* with the surface of the ball. Because now the sine of the angle *PAQ* is expressed by $\frac{PQ}{PA}$, thus the force of the air on the point *A* shall be as



$$PA^2 \cdot \frac{PQ^2}{PA^2}, \text{ that is, as } PQ^2.$$

[These results follow from the elementary kinetic theory of gases.]

But if the ball has a rotational motion, and since its mid-point stands still, thus the point A can have no other motion, as along any direction, which the tangent plane of the ball lies, thus represented by the plane of the copper-plate [on which the original diagram was drawn in mirror image for printing]. Thus Aa shall be the direction, along which the point A itself moves, and one takes Aa just so large, that the ratio PA to Aa , shall be as the speed of the air to the speed of the point A . Now in order to determine the force, which the air moving along in the direction PA subjects on the point A moving in the direction Aa , thus one requires only the motion of the point A disclosed relative to the motion of the air, which happens if we draw the line Pp equal and parallel to Aa . For since the action of the air on the point A shall be just as great, as if the same stood still, but the air afterwards is forced along the direction of the line pA with some speed, which will be represented by the line pA . Consequently one must multiply the square of this speed or the line pA by the square of the sine of the angle, which this line pA makes with the tangential plane. In order to find this angle, thus one draws from the point p on the tangent plane the perpendicular line pq , which happens, if one puts the line Qq equal and parallel to the line Aa . Therefore because also Qq is equal and parallel to the line Pp , and likewise the line pq to the line PQ , thus there must be

$$pq = PQ,$$

and the fraction $\frac{pq}{pA}$ will express the sine of the angle pAq , under which the air rebounds from the moving point A . On which account the force of these rebounds will be as

$pA^2 \cdot \frac{pq^2}{PA^2}$, that is, as pq^2 . Now since $pq = PQ$, thus the force of the air on the moving point A shall be just as great, as if this point A had no motion at all. Therefore equally by the motion of the point A as well as the speed arising from the interaction with the air pA , then the angle pAq will change, under which the interaction happens, but thus by these changes which thus come about, there one and the same force shall arise. But what here has been demonstrated from a single point A of the surface of the bullet, the same value can be given of all other points of the same ; and thus through this will our proposition be confirmed incontestably, that a completely round ball, which besides its progressive motion rotates around its middle-point, suffers just the same resistance from the air, as if the same had no rotational motion at all.

Thus if such a ball were to be fired from a cannon, still had received a rotational motion about its mid-point, as well as the progressive motion, thus would the same still thus go forwards, as if it had received no rotational motion. And since the progressive motion for a fully round ball will not be changed in any manner by a rotational motion, thus it is clear from this, that if a ball were not fully round, such a ball would experience a change in the resistance of the air from the rotational motion, yet the same would not be noticed, so that the ball moves almost as it would, if there were no rotational motion at all present therein. Therefore in no case can the rotational motion of the ball change the progressive motion of the ball.

PROP. VIII.

If bullets of the same diameter and density impinge on the same solid surface with different velocities, they will penetrate that substance to different depths, which will be in the duplicate ratio of those velocities nearly. And the resistance of solid substances to the penetration of bullets is uniform.

The first part of this proposition I have found to be true in a great number of instances; for when a leaden bullet $\frac{3}{4}$ of an inch in diameter, was fired against a solid block of elm, with a velocity of about 1700 feet in 1", I found, that in a great number of trials it had penetrated from $4\frac{1}{2}$ to $5\frac{1}{2}$ inches deep. When a bullet of the same size was fired against the same block, with a velocity of about 730 feet in 1", its outer surface was always near $\frac{1}{4}$ of an inch within the surface of the wood, so that its penetration was at a medium about 1 inch ; or, if the cavity be considered, and reduced to a cylinder, about $\frac{7}{8}$ of an inch, and with a velocity of 400 feet in 1" , the bullet penetrated the same block usually to about half its substance, which, reduced to a cylindrical cavity is $\frac{1}{4}$ of an inch in depth.

Now 55, 10, 3 are nearly in the duplicate proportion of these velocities ; whence, if the penetration to the greatest velocity be supposed 5 inches, the penetration of the others ought by the proposition to be $\frac{10}{11}$ and $\frac{3}{11}$ of an inch respectively ; and these number scarcely differ from $\frac{7}{8}$ and $\frac{1}{4}$, which are what we have found in our experiments ; a greater coincidence than this cannot be expected, when the unequal texture of the same piece of wood, and the change of the form of the bullet by the stroke, are considered. Now, from the penetration being in the duplicate proportion of the velocity of the impinging body, the uniform resistance of the wood is easily evinced on the same principles, that the uniform action of gravity is demonstrated from its communicating to falling bodies velocities in the duplicate proportion of the spaces they descend through, or from the rising of bodies when projected upwards, to heights which are in the duplicate proportion of the velocities, with which they begin to ascend.

REMARK

If a body is thrown against an immoveable wall, or against a wall, thus it rebounds or penetrates the same as far as its whole speed is used up by the resistance. The rebound happens if the thrown body as well as the wall are perfectly elastic, or it is endowed with a force, after itself having forgone a change in its shape, again returns to its original shape. If this elastic force were not present, then the ball would penetrate deep into the wall, to the extent that all the motion is lost, and then remains at rest. In both cases namely the ball makes an impression : in the first case the same is restored, but in the second the impression still continues after the collision ; and from this arises the difference between elastic and inelastic bodies. Between these two kinds of body there are still so many different kinds of intermediate bodies, as the case may be according to

the restoring force being either greater or smaller : so that one can say almost with certainty, that neither a completely elastic body may be located in the whole world, nor another which would be entirely devoid of elasticity. For a body may thus be assumed to be so nearly elastic that it is possible always, that a small mark remains after an impression has been made : and one has still not encountered a body, which after it had received an impression, may be restored anew in some small measure. But we have for the explanation of the present proposition to consider only a single impression, which arises when two bodies encounter each other, and which is produced always, whether the bodies be elastic or not : and in this view it is worth just as much, whether this impression continues unchanged or else to have returned to its former state. Meanwhile still so much is known from the experiment, that if a ball should be fired into a rampart or into a wooden wall, the ball remains stuck therein, and not to be driven out noticeably. Therefore if these bodies shall be endowed with an elastic force, thus the same can surely be removed from consideration.

Now if a ball be fired against such a body, thus the same not only makes an impression, but also penetrates a certain depth into it, and since such cannot happen without a large resistance, thus through that the speed of the ball will diminish gradually and finally vanish. Therefore in order that this depth may be found, to which a ball is able to penetrate, the resistance must be determined thus, which the ball suffers while it penetrates. If the rampart or wall is made of wood or earth, thus one can well imagine, that in order to cause such a depression, the deeper the hole is, thus a much greater force will be necessary than what shall have been used before. For since the elasticity in this case is not noticeable, so the ball may be found, after it has penetrated already to a certain depth, to have just as great a resistance as initially. Wherefore this resistance is a constant or uniform force, which is not based on the speed of the ball, and is therefore in this situation is similar to the force of gravity, through which an upwards thrown body in equal times always loses an equal amount of its speed, and the same may be large or small. The size of this force is based now in the first place on the strength of the material of the wall or rampart, but after that also on the width of the hole, which the ball makes in the material, and which is proportional to the square of the diameter of the ball.

Therefore if the diameter of the ball is put $= c$, and the solidness of the wall is designated by f , thus the resistance shall be proportional to this formula ccf . We will therefore put in place, the force of the resistance to be equal to the weight of a water column, of which the height $= f$, and which is the same width as the ball, while we are free to determine this force at will, only if in all different cases the true proportion of the magnitude f is to be observed. We will put in place further, the weight of the matter, of which the ball is composed, its ratio to the weight of water will be as n to 1. Now should b designate the height, from which by falling this very speed will be produced, with which the ball strikes the wall initially ; but after the same has already penetrated in the material to a depth $= x$, thus the speed of the ball will be indicated by \sqrt{v} . Since now the ball is equal to an equally wide cylinder of water, of which the height $= \frac{2}{3}nc$, thus the resistance itself will be in proportion to the weight of the ball, as f to $\frac{2}{3}nc$, that is, as

$\frac{3f}{2nc}$ to 1. From this one obtains this equation, while the ball penetrates into the material a further infinitesimal small distance dx ,

$$dv = -\frac{3fdx}{2nc};$$

and therefore

$$v = b - \frac{3fx}{2nc}.$$

But the ball travels forwards so far, to penetrate further into the material, until all its motion is lost completely, that is, until $v = 0$. Therefore if the depth of the hole, which the ball is able to cause by its motion through the wall, shall be put = a , thus the equation is obtained

$$b = \frac{3af}{2nc} \text{ or } a = \frac{2ncb}{3f}.$$

This depth is therefore as the weight of the ball and the square of the speed multiplied by each other, and divided besides by the product of the square of the diameter of the ball and the strength of the wall. Therefore if equal balls were fired into the wall, thus the depths of the holes will be as the square of their speeds. Now since this is confirmed through experiment, thus from that it follows that also our principles must be correct, on which the shot has been founded. But further we see from this, that if balls of unequal sizes, which still are made from the same material, were fired against the very same wall with equal speeds, the depths of the holes must be in proportion to the diameter of the ball; in addition that larger balls under similar circumstances not only make larger holes in the wall, but also to penetrate deeper. If however the depths penetrated in turn have been found from the experiments, by which a give ball with a know speed has penetrated into a wall, thus one can see from that how to determine the magnitude f , by which the solidness of the material of the wall is designated, and one can from such a form distinguish through experiments the hardness of different materials from each other.

The author had fired his ball against a block of elm wood, and therefore we can determine the value of the letter f for this kind of wood. The ball was $\frac{3}{4}$ inch in diameter, from which there was $c = 0,0625$ Eng. ft., and since the ball was made of lead, thus there was $n = 11,35$. Since the ball had a speed of 1700 ft. per second, whereby $b = 44900$ Eng. ft., and finally the ball penetrates 5 inches deep, that is 0,4166 ft., into this wood. One finds from this equation

$$f = \frac{2ncb}{3a}$$

this value :

$$f = \frac{22,7 \cdot 0,0625 \cdot 44900}{1,25} = 50960.$$

Thus this value has been found for the letter f for elm wood, from which one can determine in all cases, how deep each single ball is able to penetrate. But from that one can compare the solidness of this wood with the solidness of an earthen rampart, thus we will put in place, that a half carthaun-ball with a full charge has penetrated 15 ft. deep into such a rampart. Because this ball is made of iron, thus there is $n = 7,82$, and the diameter of the ball is $c = 0,46$ Eng. ft. The speed of this ball, by which the same reaches into the rampart, works out at around 1300 ft. per second, and there shall be $b = 27040$. Now because $a = 15$ ft., thus there will be $f = 4323$. Consequently the ratio itself of the solidity of the elm wood to the solidity of an earthen rampart is around 11,8 to 1. And by this way one can compare the solidness of all other materials amongst themselves, if such an experiment thereby could be performed.

ERSTE ANMERKUNG

In einem jeglichen harten Körper kann eine doppelte Bewegung Platz finden: eine wodurch der ganze Körper von einem Ort zu einem andern gebracht wird, und diese wird die fortgehende Bewegung des Körpers genennet. Die andere ist eine drehende Bewegung, wodurch sich der Körper um sich selbst, oder um eine durch sein Mittelpunkt gehende Axe, herumdrehet. Hier ist nur von harten Körpern die Rede; denn weiche, oder biegsame, oder gar flußige Körper können ausser diesen beyden noch unendlich vielerley andere Bewegungen haben. Ein harter Körper hat nun entweder eine fortgehende, oder drehende Bewegung allein, oder bey de Bewegungen beysammen. Wenn sich in einem solchen Körper nur allein eine fortgehende Bewegung befindet, so gehen alle Theile desselben nicht nur gleich geschwind, sondern die Directionen aller Theile sind auch unter sich parallel. Von dieser Bewegung gilt auch derjenige erste Grundsatz der Mechanic, wodurch behauptet wird, daß ein jeglicher in eine solche Bewegung gesetzter Körper immerfort mit einerley Geschwindigkeit und nach einerley Richtung fortgehe, woferne keine ausserliche Krafte auf denselben Würken, und seinen Zustand verändern. Woraus denn hinwiederum folget, daß, so oft entweder die Geschwindigkeit oder die Richtung eines Körpers verändert wird, auf denselben nöthwendig eine ausserliche Kraft gewürket haben müsse.

Ein Körper kann ferner, ohne seine Stelle zu verändern, eine drehende Bewegung haben, wodurch derselbe um eine Axe herumdrehet wird. In dieser Bewegung bleibt die Axe unbeweglich, und alle Theilchen des Körpers gehen um dieselbe herum, deren Geschwindigkeit um so viel grösser ist, je weiter dieselben von der Axe entfernt sind. Wenn diese Axe befestigt ist, so kann man sich eine solche Bewegung am füglichsten an einer Drechsel-Bank vorstellen; es kann sich aber ein Körper auch um eine Axe, so nirgend befestiget ist, bewegen. Hiezu werden aber zwey Stücke erfordert: erstlich, daß die Axe durch das Centrum gravitatis des Körpers durchgehe, und zweytens, daß die Schwingungs-Krafte (*Vires centrifugae*) aller Theilchen einander im Gleichwichte halten. Wo diese beyden Bedingungen Platz finden, da gilt auch die oben erwehnte Regel, daß eine solche Bewegung immerfort gleichformig fortdauret, und keine Veränderung leidet, wenn keine ausserliche Krafte dazu kommen. Hälten aber die *Vires centrifugae* einander nicht im Gleichwicht, so wird zwar die Bewegung des Körpers

fortdauren, allein die Axe, um welche dieselbe geschieht, wird selbst beweglich, und die Herumdrehung geht beständig um eine andere Axe. Wenn eine Kugel aus einer allenthalben gleich dichten Materie gemacht ist, so sind die Vires centrifugae immer im Gleichgewichte, wenn nur die Axe der Kugel durch ihr Mittelpunkt gehet, und also kann eine solche Kugel eine beständig gleich geschwind fortdaurende Bewegung um eine jegliche Linie, so durch ihr Mittelpunkt gehet, haben.

Diese beyden Bewegungen, nemlich die fortgehende und herumdrehende, sind nun von einander dergestalt unterschieden, daß sich beyde in einem Körper zugleich befinden können, ohne, daß eine von der andern im geringsten gestoret würde; eine jede kann auch von ausserlichen Kraften ganz allein verändert werden, ohne daß die andere dadurch die geringste Veränderung leidet. Ein Exempel einer solchen doppelten Bewegung in einem Corper stellet uns die Erd-Kugel dar, als welche sich erstlich nach ihrer fortgehenden Bewegung in einem Jahr um die Sonne herum bewegt, und sich inzwischen beständig um ihre Axe in 24 Stunden herumdrehet. In der Erde ist auch noch die Veranderlichkeit ihrer Axe zu bemerken, als welche sich jährlich um 50 Secunden ruckwärts lenket.

Wenn also einem Körper, außer der fortgehenden Bewegung, auch eine Bewegung um eine Axe, so durch das Centrum gravitatis desselben gehet, und welche also beschaffen ist, daß sich alle Vires centrifugae im Gleichgewichte halten, eingedrückt worden, so werden darinne beyde zugleich beständig fortdauren, und wenn keine ausserliche Krafte darauf Würken, keine Veränderung leiden.

Die Haupt-Sache beruhet nun darauf, was für Krafte einem Körper entweder nur eine fortgehende Bewegung, oder nur eine herumdrehende, oder beyde zugleich einzudrücken vermögend sind.

Wenn die Direction der Kraft durch das Centrum gravitatis des Körpers gehet, so Würket dieselbe nur eine fortgehende Bewegung. Wenn nemlich der Körper vorher still gestanden, so wird demselben eine Bewegung nach eben derjenigen Direction, nach welcher die Kraft gerichtet ist, eingedrucket; und wenn der Körper schon vorher eine fortgehende Bewegung gehabt, so wird dieselbe entweder schneller oder langsamer, oder es wird auch die Direction derselben verändert, je nach dem die Direction der Kraft entweder vorwärts oder ruckwärts, oder schief auf die Direction der Bewegung würket.

Wenn aber der Körper außer der fortgehenden Bewegung noch eine herumdrehende schon hat, so bleibt dieselbe von einer solchen Kraft, welche durch das Centrum gravitatis des Körpers gehet, völlig unverändert. Wenn die Direction der Kraft nicht durch das Centrum gravitatis des Körpers gehet, so wird dadurch erstlich die fortgehende Bewegung gleicher maaßen verändert, als wenn eben dieselbe Kraft nach einer parallelen Direction durch das Centrum gravitatis gienge. Ueber dieses aber wird dem Körper von einer solchen Kraft eine herumdrehende Bewegung um eine Axe, welche durch sein Centrum gravitatis gehet, und auf die Fläche, so durch dieses Centrum und die Direction der Kraft gezogen wird, perpendicular aufstehet, eingedrückt. Hat aber der Körper schon vorher eine herumdrehende Bewegung, entweder um eben diese Axe, oder um eine andere gehabt, so wird dieselbe entweder geschwinder oder langsamer, in dem letztern Fall aber wird auch die Axe selbst verändert.

Wenn aber zwo oder mehr Krafte zugleich auf den Körper würken, so findet man folgender Gestalt, was daher für Bewegungen und Veränderungen in dem Körper

entstehen müssen. Erstlich stellt man sich vor, als wenn alle diese Kräfte nach Parallel-Directionen durch das Centrum gravitatis giengen, und verwandelt dieselben in eine einige Kraft, aus welcher die Erzeugung und Veränderung der fortgehenden Bewegung bestimmt wird. Wenn es also geschieht, daß alle diese Kräfte einander aufheben, so leidet die fortgehende Bewegung davon gar keine Veränderung. Was aber hernach die herumdrehende Bewegung anlangt, so sucht man von allen diesen Kräften nach ihren wirklichen Directionen die Momenta, indem man dieselben durch ihre Entfernungen von dem Centro gravitatis multipliciret; und indem man dieselben gegen einander hält, so findet man, um was für eine Axe, und wie stark der Körper, herum getrieben werden müsse. Hieraus laßt sich folglich entweder die Erzeugung einer herumdrehenden Bewegung, wenn der Körper vorher noch keine gehabt, oder die Veränderung derselben, wenn schon eine vorhanden gewesen, bestimmen.

Nach diesen Gründ-Sätzen wollen wir nun genauer untersuchen, was für eine Bewegung einer Kugel, welche aus einer Canone geschossen wird, von der Gewalt des Pulvers eingedrückt, und wie dieselbe nachgehends durch den Widerstand der Luft verändert werde. Wir wollen erstlich annehmen, die Kugel sey vollkommen rund, und ihr Centrum gravitatis sey mit ihrem Mittelpunct einerley. In diesem Fall geht die fortreibende Gewalt des Pulvers nicht nur durch das Centrum gravitatis der Kugel, sondern ihre Direction ist auch mit der Axe des Laufs einerley; dahero der Kugel nur allein eine fortgehende Bewegung nach der Axe des Laufs eingedrückt wird. Die Kugel bekommt also eben diejenige Bewegung, welche wir oben mit dem Autore für dieselbe herausgebracht haben, und erhält folglich von der Gewalt des Pulvers keine herumdrehende Bewegung. Weil aber die Kugel auf der innern Höhlung der Canone fortgeht, und daher eine Friction leidet, deren Direction nicht durch das Centrum der Kugel geht, sondern dieselbe von aussen berührt, so mußte dadurch der Kugel eine drehende oder rollende Bewegung eingedrückt werden, woferne solche durch den Pfropf nicht verhindert würde. Denn da der Pfropf die Kugel sehr gedräng einzuschließen pflegt, so ist die Friction zu schwäch, um der Kugel eine solche rollende Bewegung einzudrücken. Also fährt die Kugel bloß allein mit einer fortgehenden Bewegung in die Luft, wo dieselbe theils der Kraft der Schwehre, theils dem Widerstand ausgesetzt ist. Die erstere Kraft geht immer durch das Centrum gravitatis, und würket also nur auf die fortgehende Bewegung, als welche dadurch abwärts gekrümmt wird. Die Kraft des Widerstands geht in diesein Fall auch durch das Centrum gravitatis der Kugel, und bringt also gleichfalls keine herumdrehende Bewegung hervor. Und weil dieselbe mit der Direction der Kugel übereinstimmt, so wird dadurch auch der Körper nicht aus derjenigen Vertical-Flache, in welcher die Bewegung angefangen, gezogen. Woraus erhellet, daß, wenn die Kugel vollkommen rund, und ihr Centrum gravitatis in ihrem Mittelpunct befindlich ist, die Bewegung derselben eben so beschaffen seyn müsse, als die Theorie erfordert. Die Kugel wird sich nemlich in einer Vertical-Flache bewegen, und von derselben weder zur rechten noch zur linken ausweichen. Wenn sich also das Ziel, nach welchem man schießen will, in eben dieser Vertical-Flache befindet, so kann der Schuß nicht anders fehlen, als daß derselbe entweder zu hoch, oder zu niedrig geht.

Wenn aber die Vertical-Flache, worinnen sich die Kugel beweget, nicht durch das Ziel geht, so muß der Schuß auch seitwärts fehlen, und das um so viel mehr, je weiter das

Ziel von der Canone entfernet ist; wenn nemlich der Winkel, welchen die gerade Linie, so von dem Stück zum Ziel gezogen wird, mit der gemeldten Vertical-Flache einerley Winkel macht. Wenn dahero die Kugel einmahl zum Exempel zur Rechten von dem Ziel abgewichen, so müssen auch alle Schusse, welche ohne die Richtung der Canone zu verändern gethan werden, gleich weit zur Rechten des Ziels verfehlen, wenn auch gleich die Ladung vermehret oder vermindert worden. Wenn also bey vielen Schussen, welche aus einem befestigten Lauf, dessen Richtung nicht verändert werden kann, der Fehler bald zur rechten bald zur linken vom Ziel abweicht, und auch in grössern Entfernungen, nach einer grössern Verhältniß wächst, als die Entfernung selbst, so schliesset der Autor richtig, daß die Bahn der Kugel in keiner Vertical-Flache gewesen, und daß dieselbe folglich eine doppelte Krümmung gehabt haben müsse.

Nun wollen wir eine Kugel betrachten, welche zwar vollkommen rund, deren Centrum gravitatis aber ausser ihrem Mittelpunkt befindlich ist. So lange diese Kugel der Gewalt des Pulvers in dem Lauf der Canone ausgesetzt ist, so gehet die Direction dieser Gewalt durch das Mittelpunkt der Kugel, und ist der Axe der Canone parallel, folglich bekommt dieselbe eben diejenige fortgehende Bewegung, als in dem vorigen Fall; und wenn diese Direction zugleich durch das Centrum gravitatis gehet, so wird davon auch keine drehende Bewegung hervorgebracht. Wenn aber das Centrum gravitatis der Kugel ausser dieser Linie, nach welcher die Kraft des Pulvers würcket, zu liegen kommt, so wird der Kugel zugleich eine drehende Bewegung um das Centrum gravitatis eingedrückt. Da aber durch eben diese Bewegung das Mittelpunkt der Kugel bald auf die entgegengesetzte Seite des Centri gravitatis gebracht wird, so wird durch diese Kraft die vorige drehende Bewegung der Kugel wiederum zernichtet, dergestalt, daß keine beständige herumdrehende Bewegung in der Kugel hervorgebracht werden kan. Eine gleiche Bewandniß hat es auch, wenn die Kugel schon aus dem Lauf heraus geschossen worden; denn die Direction des Widerstands geht alsdenn durch das Mittelpunkt der Kugel, und da dieselbe der Bewegung der Kugel schnurgerade entgegen ist, so wird dadurch die fortgehende Bewegung der Kugel eben wie im vorigen Fall verändert. Ueber dieses aber bekommt die Kugel eine drehende Bewegung um das Centrum gravitatis, wodurch das Mittelpunkt ruckwärts getrieben wird. So bald aber das Mittelpunkt beginnt wiederum vorwärts zu kommen, so wird die Kraft des Widerstands der vorigen zuwieder, und vermindert also die schon erzeugte drehende Bewegung, wodurch dieselbe endlich ganzlich gehemmet und die Kugel also fortgehen wird, daß das Mittelpunkt hinter dem Centro gravitatis beständig bleibt. Hieraus folget, daß endlich die schwehere Helfte der Kugel, in welcher das Centrum gravitatis befindlich ist, beständig voraus gehet, und die leichtere nachfolget, welcher Umständ auch jederzeit in der That wahrgenommen wird. In diesem Fall wird also auch nicht die Kugel aus der Vertical-Flache, in welcher die Bewegung angefangen, ausweichen. Dahero diese Ausweichung von keiner andern Ursache herrühren kan, als von dem Mangel einer vollkommenen Ründung.

Wenn die Kugel nicht vollkommen rund ist, so kan es geschehen, daß die Direction der Gewalt des Pulvers nicht nur nicht durch das Centrum gravitatis der Kugel gehet, sondern daß dieselbe auch nicht einmahl der Axe der Canone parallel läuft. Im ersten Fall würde der Kugel eine herumdrehende Bewegung eingedrückt werden, welche aber, wie in dem vorigen Fall gewiesen worden, bald wiederum aufhören mußte. Der letztere Fall

aber ist bey den von dem Autore angeführten Umständen insonderheit merkwürdig; denn da wird die Kugel nicht nach der Axe der Canone fortgetrieben, sondern nach der Direction der forttreibenden Gewalt. Also wird die Kugel gegen die inneren Wände der Canone gestossen, von welchen sie wiederum zurück prallet, und dahero keine geringe Kraft auf die Canone ausubet. Dieses ist der Fall, dessen wir oben erwehnet haben, da eine Canone, wenn dieselbe gleich vollkommen gerade gebohret ist, dennoch von der Gewalt der Kugel allein zersprengt werden kan, woraus die Nothwendigkeit der vollkommenen Ründung der Canonen-Kugeln um so viel deutlicher erhellet.

Wenn aber eine solche Kugel, welche nicht völlig rund ist, aus der Canone herausgefahren, so wird ausser dem, daß ihre Direction schon etwas von der Axe des Stückes abweicht, noch ihre Bewegung durch den Widerstand der Luft ganz anders verändert, als wenn die Kugel vollkommen rund wäre. Denn da sich der Widerstand der Luft nach der äußern Figur der Kugel richtet, so ist es nicht nur möglich, daß die Direction des Widerstands von der Direction der Bewegung unterschieden sey, sondern es würde auch ein sehr rarer Zufall seyn, wenn diese beyden Directionen mit einander übereinstimmen sollten. Es kann also geschehen, daß erstlich die Kugel von dem Widerstand entweder mehr aufwärts oder abwärts, als sonst geschehen würde, getrieben werde. Und hieraus begreift man ganz deutlich, wie bißweilen eine Kugel etliche hundert Schritt weiter oder näher zu Boden fallen könne, als eine andere, wenn gleich beyde aus einem Lauf, unter einerley Richtung, und mit gleicher Ladung sind heraus geschossen worden. Wenn aber die Direction des Widerstands nicht in die Vertical-Flache, in welcher die Bewegung angefangen, fällt, so wird dadurch die Kugel seitwärts, entweder zur rechten oder zur linken, getrieben. Und wenn sich die Kugel nicht herumdrehet, so weicht diese Kraft beständig von gemeldter Vertical-Flache gleich viel ab; folglich wird dadurch die Kugel je länger je mehr seitwärts abgetrieben, dergestalt, daß je weiter die Kugel geschossen wird, die Abweichung derselben von dem Ziel um so viel grösser seyn wird. In einer doppelten Entfernung wird nemlich die Abweichung der Kugel von dem Ziel nicht nur zweymahl, ja nicht nur dreymahl so groß seyn, als welches geschehen würde, wenn die Kugel, nachdem sie die erste Helfte des Wegs durchlaufen, nicht mehr seitwärts getrieben werden sollte; sondern die Abweichung müßte vier mahl so groß werden, wenn die seitwärts treibende Kraft der Kugel immer gleich groß bliebe. Da aber dieselbe mit der Geschwindigkeit der Kugel abnimmt, so wird die Abweichung zwar etwas kleiner als 4 mahl so groß, immer aber mehr als dreymahl so groß seyn. Die wahre Ursache also der Ungewißheit der Schüsse bestehet ganz allein in dem Mangel der runden Figur der Kugel, und es kann eine drehende Bewegung der Kugel dazu nichts merkliches beytragen, wie der Autor vermeynet. Im Gegentheile, wenn sich die Kugel in ihrem Flug herumdrehen sollte, so müßte die Kraft des Widerstands bald zur Rechten, bald zur Linken gerichtet seyn, und könnten also die Schüsse in grössern Entfernungen nicht ungewisser werden, als in kleinem. So groß aber auch die Ungewißheit der Schüsse, welche der Autor anführet, zu seyn scheint, so ist nicht zu vermuthen, daß dieselbe bey Canonen-Kugeln so groß seyn sollte. Denn der Autor hat mit bleyernen Kugeln seine Versuche angestellt, welche nicht nur sehr merklich von einer runden Figur abzugehen pflegen, sondern auch in dem Lauf noch viel mehr verändert werden können. Die Canonen-Kugeln hingegen scheinen gemeinlich eine vollkommenere Ründung zu

haben, und da dieselben von Eisen, so kan ihre Figur auch nicht so leicht in dem Lauf der Canonen verändert werden. Aus dieser Ursache müssen also die Canonen-Schüsse in ihrer Art weit gewisser seyn, als die Mußketen-Schüsse, welche mit bleyernen Kugeln gethan werden. Hiervon müssen aber, allem Ansehen nach, die Schüsse, welche aus gezogenen Röhren geschehen, ausgenommen werden, und das aus eben derjenigen Ursache, welche der Autor von der Unrichtigkeit der Schüsse überhaupt angeben will. Denn weil die Kugeln aus gezogenen Röhren eine drehende Bewegung bekommen, welche mit der fortgehenden immer fortdauret, so wird beständig eine jede Kraft des Widerstands, wodurch die Kugel immer entweder aufwärts, oder seitwärts getrieben wird, gleichsam in einem Augenblick, indem sich die Kugel herumdrehet, in eine entgegen gesetzte verwandelt, dahero von der unrichtigen Figur der Kugel in diesem Fall keine so Grösse Ungewißheit entstehen kann, als wenn die Kugel mit keiner drehenden Bewegung begabet ist.

ZWEYTE ANMERKUNG

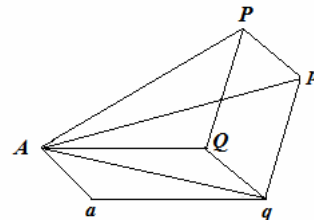
Wir haben also die wahre Ungewißheit der Schüsse, welche der Autor in diesem Satz anführet und sehr zweifelhaft erkläret, unstreitig entdeckt, indem wir gewiesen, daß dieselbe ganz allein auf der Figur der Kugel beruhe. Denn, wenn die Kugel vollkommen rund ist, wenn auch gleich ihr Centrum gravitatis von dem Mittelpunkt verschieden wäre, so kan die Abweichung der Kugel von dem Ziele seitwärts nicht merklich seyn. Und Wenn in diesem Fall die Kugel des Ziels seitwärts verfehlen sollte, so würde dieses ein sicheres Zeichen seyn, daß sich das Ziel nicht in derjenigen Vertical-Flache, nach welcher die Axe des Stücks oder Schieß-Gewehrs gerichtet ist, befände. Wenn aber die Kugel nicht völlig rund ist, so haben wir gewiesen, daß dieselbe meistentheils von ihrer Richtung seitwärts abweichen, und bey dem Ziel um so viel weiter seitwärts vorbeigehen musse, je weiter das Ziel von dem Schieß-Gewehr entfernt ist. Diese Abweichung wird auch durch die herumdrehende Bewegung der Kugel nicht nur nicht vermehret, sondern wenn die Kugel eine solche Bewegung hätte, so würde die Ungewißheit des Schusses bey weitem nicht so groß seyn.

Der Autor scheint zwar das Gegentheil zu behaupten, allein ausser dem, was vorher angeführet worden, so können wir auch beweisen, daß die Kraft des Widerstands nicht merklich von einer drehenden Bewegung der Kugel verändert werde, und derselben ungeachtet beynahe allezeit eben so groß sey, als wenn die Kugel keine herumdrehende Bewegung hätte. Es ist zwar wahr, wie der Autor bemerket, daß durch eine solche drehende Bewegung sowohl die Geschwindigkeit, mit welcher ein jegliches Punkt der Kugel auf die Luft stößt, als auch der Winkel, unter welchem dieser Stoß geschieht, verändert werde. Allein es bleibt erstlich die Direction der Kraft des Stosses immer perpendicular auf die Oberfläche der Kugel Hernach da die Kraft des Stosses selbst sich beständig verhält, wie das Quadrat der Geschwindigkeit multiplicirt durch das Quadrat des Sinus des Winkels, unter welchem der Stoß geschieht, so wird fast immer der Sinus dieses Winkels um eben so viel grösser oder kleiner, als die Geschwindigkeit vermindert oder vermehret wird, dahero auch die Stärke des Stosses beynahe einerley bleibet, die Kugel mag eine drehende Bewegung haben oder nicht.

Diese Gleichheit trifft beynahe zu, wenn die Figur der Kugel nicht merklich von einer vollkommenen Rundung unterschieden ist, und wenn die Axe, um welche die drehende Bewegung geschieht, beynahe durch das Mittelpunkt derselben geht wenn aber die Kugel vollkommen rund ist, und sich um eine Axe, welche durch ihr Mittelpunkt gehet herumdrehet, alsdenn ist so gar die Wirkung des Widerstands vollkommen einerley, die Kugel mag eine solche drehende Bewegung haben oder nicht.

Wir haben also nur nöthig, diesen letztern Fall zu beweisen; indem aus der Wahrheit desselben von selbst folgt, daß wenn die Figur der Kugel nicht viel von einer volligen Ründung abweicht, und die Axe der Herumdrehung beynahe durch das Mittelpunkt desselben gehet, die Ungleichheit des Widerstands, wenn dieselbe nicht gar wie im erstern Fall verschwindet, dennoch nicht merklich seyn könne. Um also dieses deutlich darzuthun, so wollen wir eine vollkommen runde Kugel betrachten, welche ausser ihrer fortgehenden Bewegung sich um eine durch ihr Mittelpunkt gehende Axe herumdrehe; es ist auch gleich viel, ob diese Axe beständig oder unbeständig angenommen werde. Hierbey ist nun erstlich zu merken, daß wenn die Kugel gar keine fortgehende Bewegung hätte, dieselbe auch von der Luft keinen andern Widerstand leiden würde, als welcher etwa von dem Reiben der Theilchen entstehen mochte, welcher aber so geringe ist, daß man denselben leicht aus der Acht lassen kann. Denn wenn die Kugel keine fortgehende Bewegung hat, so stehet ihr Mittelpunkt völlig still, und da alle Theilchen der Oberfläche immer gleich weit von dem Mittelpunkt entfernt bleiben, so können dieselben keine solche Bewegung haben, wodurch gegen die Theilchen der Luft ein wirklicher Stoß entstände. In diesem Fall werden nemlich die Theilchen der Luft in keine andere Bewegung gesetzt, als in so ferne dieselben durch die schwache Friction mit fortgezogen werden, und daher können dieselben auch keine Gewalt auf die drehende Bewegung der Kugel ausüben. Wenn aber die Kugel eine fortgehende Bewegung hat, so kan man sich die Sache, wie oben gewiesen worden, immer so vorstellen, als wenn die Kugel gar keine fortgehende Bewegung hätte, hingegen aber die Luft mit einer gleichen Geschwindigkeit darauf stiesse; denn in beyden Fallen muß die aus dem Anstossen der Lufttheilchen entstehende Gewalt einerley seyn.

Wir wollen uns also eine Kugel vorstellen, deren Mittelpunkt unbeweglich seyn soll, um welches sich die Kugel herumdrehe, und wollen setzen, daß die Luft mit einer gegebenen Geschwindigkeit auf diese Kugel bewege werde. In der Figur soll die Fläche des Papiers die Kugel in dem Punkt *A* berühren, und die Luft nach der Direction *PA* auf dieses Punkt der Kugel *A* stossen. Man stelle sich die Geschwindigkeit der Luft durch die Linie *PA* vor, und lasse aus dem Punkt *P* auf die berührende Fläche einen Perpendicular *PQ* herab fallen, und ziehe die Linie *AQ*. Wenn nun die Kugel keine herumdrehende Bewegung hätte, so würde die Stärke des Stoßes der Luft seyn wie das Quadrat der Linie *PA*, wodurch die Geschwindigkeit der Luft angedeutet wird, inmultipliciret durch das Quadrat des Sinus des Winkels *PAQ*, welchen die Direction der Bewegung der Luft *PA* in diesem Punkt *A* mit der Oberfläche der Kugel macht. Weil nun der Sinus des Winkels *PAQ* durch $\frac{PQ}{PA}$



ausgedrückt wird, so wird die Kraft der Luft auf das Punkt A seyn, wie $PA^2 \cdot \frac{PQ^2}{PA^2}$, das ist, wie PQ^2 .

Wenn aber die Kugel eine drehende Bewegung hat, und daßey ihr Mittelpunkt stille steht, so kann das Punkt A keine andere Bewegung haben, als nach einer Direction, welche der berührenden Fläche der Kugel, so durch die Fläche der Kupfer-Platte vorgestellt wird, lieget. Es sey also Aa die Direction, nach welcher sich das Punkt A bewege, und man nehme Aa so groß, daß sich verhalte PA zu Aa , wie die Geschwindigkeit der Luft zur Geschwindigkeit des Punkts A . Um nun die Wirkung zu bestimmen, welche die nach der Direction PA bewegte Luft auf das nach der Direction Aa bewegte Punkt A ausubet, so darf man nur die Bewegung des Punkts A in den Gedanken der Luft mittheilen, welches geschieht, wenn wir Pp der Linie Aa parallel und gleich groß ziehen. Denn da wird die Wirkung der Luft auf das Punkt A eben so groß seyn, als wenn dasselbe still stünde, die Luft aber darauf nach, der Direction der Linie pA mit einer Geschwindigkeit, welche durch die Linie pA vorgestellt wird, stiesse. Folglich muß man das Quadrat dieser Geschwindigkeit oder Linie pA mit dem Quadrat des Sinus des Winkels, welchen diese Linie pA mit der berührenden Fläche machet, multipliciren. Um nun diesen Winkel zu finden, so ziehe man aus dem Punkt p auf die berührende Fläche die Perpendicular-Linie pq , welches geschieht, wenn man Qq der Linie Aa gleich und parallel setzt. Weil also auch Qq der Linie Pp gleich und parallel, und die Linie pq der Linie PQ gleichfalls parallel ist, so muß $pq = PQ$, und der Bruch $\frac{pq}{pA}$ wird den Sinum des Winkels pAq ausdrücken, unter welchem die Luft auf das bewegte Punkt A stößt. Derowegen wird die Kraft dieses Stosses seyn wie $pA^2 \cdot \frac{pq^2}{pA^2}$, das ist, wie pq^2 . Da nun $pq = PQ$, so wird die Kraft der Luft auf das bewegte Punkt A eben so groß seyn, als wenn dieses Punkt A gar keine Bewegung hätte. Ob also gleich durch die Bewegung des Punkts A sowohl die Geschwindigkeit der darauf stossenden Luft pA , als der Winkel pAq , unter welchem der Stoß geschieht, verändert wird, so sind doch diese bey den Veränderungen so beschaffen, daß daraus einerley Kraft entspringt. Was aber hier von einem Punkt A der Oberfläche der Kugel erwiesen worden, dasselbe gilt gleichergestalt von allen andern Punkten derselben; und hierdurch wird also unser Satz unwidersprechlich bestätigt, daß eine vollkommen runde Kugel, welche sich ausser ihrer fortgehenden Bewegung um ihr Mittelpunkt herumdrehet, eben denselben Widerstand von der Luft leide, als wenn dieselbe gar keine herumdrehende Bewegung hätte.

Wenn also eine solche Kugel je in der Canone, aus welcher dieselbe geschossen wird, ausser der fortgehenden Bewegung noch eine herumdrehende Bewegung um ihr Mittelpunkt bekäme, so würde dieselbe doch in der Luft ihre Bewegung eben so fortsetzen, als wenn sie keine herumdrehende Bewegung erhalten hätte. Und da bey einer vollkommen runden Kugel die fortgehende Bewegung durch eine drehende Bewegung keinesweges verändert wird, so ist hieraus klar, daß wenn bey einer Kugel, so nicht vollig rund ist, je eine Veränderung in dem Widerstand der Luft von der herumdrehenden Bewegung verursacht würde, dieselbe doch nicht merklich seyn könnte, sondern daß die

Kugel fast eben so bewegt werden würde, als wenn gar keine herumdrehende Bewegung darinn befindlich wäre. Dahero in keinem Fall die fortgehende Bewegung der Kugel durch eine herumdrehende Bewegung merklich verändert werden kann.

ANMERKUNG

Wenn ein Körper gegen eine unbewegliche Wand, oder einen Wall geworfen wird, so prellt derselbe entweder zuruck, oder dringet hinein, so lange, bis seine ganze Geschwindigkeit durch den Widerstand zernichtet worden. Das Zurückprellen geschieht, wenn sowohl der anstossende Körper, als der Wall vollkommen elastisch, oder mit einer Kraft begabet sind, sich, nachdem in ihrer Figur eine Aenderung vorgegangen, wiederum in ihre vorige Form herzustellen. Wo sich diese Kraft nicht befindet, da dringet die Kugel so tief hinein, bis sie alle Bewegung verlobren, und bleibt als denn still stehen. In beyden Fallen machet nemlich die Kugel einen Eindruck: im erstern Fall wird derselbe wiederum hergestellt, im letztern aber dauret der Eindruck noch nach dem Stoß fort; und hieraus entstehet der Unterscheid zwischen den elastischen und nicht elastischen Körpern. Zwischen diesen zwey Arten der Körper giebt es aber noch unendlich viel verschiedene Mittel-Arten, je nachdem die Wiederherstellungs-Kraft in denselben grösser oder kleiner ist: ja man kann fast mit Gewißheit behaupten, daß sich in der ganzen Welt weder ein vollkommen elastischer Körper befinde, noch ein solcher, welcher von aller Elasticitat ganzlich entblosset wäre. Denn ein Körper mag so vollkommen elastisch scheinen, als immer möglich ist, so bleibt doch allezeit von einem jeglichen darinn gemachten Eindruck ein geringes Merckmahl zuruck: und man hat auch noch keinen Körper angetroffen, welcher, nachdem er einen Eindruck empfangen, sich nicht einiger Maassen wieder herstellen sollte. Wir haben aber zur Erläuterung des gegenwartigen Satzes nur allein auf den Eindruck zu sehen, welcher entsteht, wenn zwey Körper auf einander stossen, und welcher allezeit entsteht, die Körper mögen elastisch seyn oder nicht: und in dieser Absicht gilt es gleich viel, ob dieser Eindruck entweder unverändert fortdauret, oder ganzlich oder auch nur zum Theil wiederum hergestellt wird. Unterdessen ist doch so viel aus der Erfahrung bekannt, daß wenn eine Kugel in einen Wall, oder in eine holzerne Wand hinein geschossen wird, die Kugel darinn stecken bleibe, und nicht merklich wiederum zuruck getrieben werde. Dahero wenn diese Körper je mit einer elastischen Kraft begabet sind, so kann dieselbe sicher aus der Acht gelassen werden.

Wenn nun eine Kugel gegen einen solchen Körper geschossen wird, so machet dieselbe nicht nur einen Eindruck, sondern dringet auch auf eine gewisse Tiefe hinein; und da solches ohne einen Grössen Widerstand nicht geschehen kann, so wird dadurch die Bewegung der Kugel nach und nach vermindert, und endlich gar zernichtet. Um also die Tiefe zu finden, auf welche eine Kugel hinein zu dringen vermögend ist, so muß man den Widerstand bestimmen können, welchen die Kugel, indem sie hineindringet, leidet. Wenn die Wand oder der Wall, von Hölz oder Erden ist, so sieht man wohl, daß, um darinn einen Eindruck zu verursachen, eine um so viel grössere Kraft erfordert werde, je grösser die Höhlung ist, welche darinn gemacht werden soll. Denn da die Elasticitat in

diesen Fallen nicht merklich ist, so findet die Kugel, nachdem sie schon auf eine gewisse Tiefe hineingedrungen, einen eben so Grössen Widerstand, als anfänglich. Derohalben ist dieser Widerstand eine beständige oder gleichformige Kraft, welche nicht auf der Geschwindigkeit der Kugel beruhet, und ist also in diesem Stück der Kraft der Schwehre ähnlich, durch welche ein aufwärts geworfener Körper in gleichen Zeiten immer gleich viel von seiner Geschwindigkeit verliert, dieselbe mag groß oder klein seyn. Die Grösse dieser Kraft beruhet nun erstlich auf der Festigkeit der Materie der Wand oder des Walles, hernach aber auch auf der Weite des Lochs, welches die Kugel darinne macht, und welches dem Quadrat des Diameters der Kugel proportional ist.

Wenn also der Diameter der Kugel = c gesetzt, und die Festigkeit des Walls durch f angedeutet wird, so wird der Widerstand dieser Formel ccf proportional seyn. Wir wollen also setzen, diese Kraft des Widerstands sey gleich dem Gewicht einer Wasser-Säule, deren Höhe = f , und welche mit der Kugel gleich dick ist, indem es uns frey steht, diese Gewalt nach Belieben zu bestimmen, wenn nur in allen verschiedenen Fallen die wahren Verhältnisse der Grösse f beobachtet werden. Ferner wollen wir setzen, die Schwehre der Materie, woraus die Kugel besteht, verhalte sich zur Schwehre des Wassers wie n zu 1. Nun soll b die Höhe anzeigen, aus welcher durch den Fall eben diejenige Geschwindigkeit erzeugt wird, mit welcher die Kugel anfänglich auf den Wall stößt; nachdem dieselbe aber schon auf eine Tiefe = x hineingedrungen, so soll die Geschwindigkeit der Kugel durch \sqrt{v} angedeutet werden. Da nun die Kugel einem gleich dicken Cylinder Wasser gleichet, dessen Höhe = $\frac{2}{3}nc$, so wird sich der Widerstand zum Gewichte der Kugel verhalten, wie f zu $\frac{2}{3}nc$, das ist, wie $\frac{3f}{2nc}$ zu 1. Hieraus bekommt man, indem die Kugel durch den unendlich kleinen Raum dx weiter hinein dringt, diese Aequation

$$dv = -\frac{3fdx}{2nc}$$

und also

$$v = b - \frac{3fx}{2nc}.$$

Die Kugel fährt aber so lange fort, weiter hinein zu dringen, bis sie ihre Bewegung ganzlich verlohren, das ist, bis $v = 0$. Wenn daher die Tiefe des Lochs, welches die Kugel durch ihre Bewegung in dem Wall zu verursachen vermögend ist, gesetzt wird = a , so bekommt man diese Vergleichung

$$b = \frac{3af}{2nc} \quad \text{oder} \quad a = \frac{2ncb}{3f}.$$

Diese Tiefe ist also wie das Gewicht der Kugel und das Quadrat ihrer Geschwindigkeit mit einander multipliciret, und durch das Quadrat des Diameters der Kugel nebst der Festigkeit des Walls dividirt. Wenn also gleiche Kugeln in eben denselben Wall

geschossen werden, so verhält sich die Tiefe der Locher, wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeit. Da nun dieses durch die Erfahrung bestatiget worden, so folgt daraus, daß auch unsere Gründe, woraus dieser Schluß gemacht worden, richtig seyn müssen. Wir sehen aber daraus ferner, daß wenn ungleich Grösse Kugeln, welche jedoch aus einerley Materie bestehen, mit gleicher Geschwindigkeit gegen eben denselben Wall geschossen werden, die Tiefe der Locher dem Diameter der Kugel proportional seyn müsse. Also daß grössere Kugeln unter einerley Umständen in dem Wall nicht nur grössere Oefnungen machen, sondern auch tiefer hineindringen werden. Wenn aber hinwiederum aus der Erfahrung die Tiefe, auf welche eine gegebene Kugel mit einer bekannten Geschwindigkeit in einen Wall hinein gedrungen, gefunden worden, so kann man daraus die Grösse f , wodurch die Festigkeit der Materie des Walls angezeigt wird, bestimmen, und solchergestalt kann man durch die Erfahrung die Festigkeit aller verschiedenen Materien, woraus die Walle immer bestehen mögen, untereinander vergleichen.

Der Autor hat seine Kugeln gegen einen Bloch aus Ulmenbaumen-Höltz geschossen, und daherö können wir den Werth des Buchstabens f für Ulmenbaumen- Höltz bestimmen. Die Kugel hielt $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter, daherö war $c = 0,0625$ Engl. Schuh, und da die Kugel von Bley gewesen, so war $n = 11,35$. Hernach hätte die Kugel eine Geschwindigkeit von 1700 Schuhen in einer Secunde, daherö wird $b = 44900$ Engl. Schuh, und endlich drung die Kugel 5 Zoll tief, das ist 0,4166 Schuh, in das Hölz hinein. Hieraus findet man aus der Aequation

$$f = \frac{2ncb}{3a}$$

diesen Werth:

$$f = \frac{22,7 \cdot 0,0625 \cdot 44900}{1,25} = 50960.$$

Dieses ist also der Werth des Buchstabens f für Ulmenbäumen-Holz, aus welchem man in allen Fallen, wie tief eine jede Kugel hinein zu dringen vermögend ist, bestimmen kann. Damit man aber die Festigkeit dieses Hölzes mit der Festigkeit eines erdenen Walls vergleichen könne, so wollen wir setzen, daß eine halbe Carthaunen-Kugel mit voller Ladung in einen solchen Wall 15 Schuh tief hinein dringe. Weil diese Kugel von Eisen, so ist $n = 7,82$, und der Diameter der Kugel ist $c = 0,46$ engl. Schuh. Die Geschwindigkeit dieser Kugel, womit dieselbe den Wall erreicht, mag ungefähr 1300 Schuh in einer Secunde austragen, und da wird $b = 27040$. Weil nun $a = 15$ Schuh, so wird $f = 4323$. Folglich verhält sich die Festigkeit des UlmenbäumenHolzes zur Festigkeit eines erdenen Walls ungefähr wie 11,8 zu 1. Und auf diese Art könnte man die Festigkeit aller andern Materien mit einander vergleichen, wenn darüber solche Versuche angestellt würden.